ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ — ೩

ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ

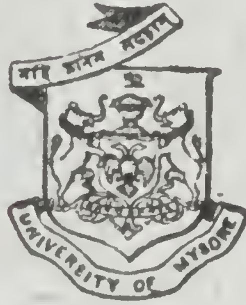
DIFFERENTIAL CALCULUS

1734

ಲೇಖಕರು :

ಬಿ. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರೀ, ಎಂ. ಎ.

ರೀಡರ್, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ



ಮೈಸೂರು

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

೧೯೬೩

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಮಾಲೆ — ೩೯

ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ

DIFFERENTIAL CALCULUS

ಲೇಖಕರು :

ಬಿ. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರೀ, ಎಂ. ಎ.

ರೀಡರ್, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ



ಮೈಸೂರು

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

೧೯೬೩

ಮೊದಲನೆಯ ಮುದ್ರಣ ೧,೦೦೦

ಎಲ್ಲ ಹಕ್ಕುಗಳನ್ನೂ ಕಾದಿರಿಸಿದೆ

ಬೆಲೆ :

ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ :
ರೂ. ೭–೫೦ ನ.ಪೈ.

ಉತ್ತಮ ಪ್ರತಿ :
ರೂ. ೮–೫೦ ನ.ಪೈ.

ಮುದ್ರಕರು :
ಪಂಡಿತ್ ಕೆ. ಎಸ್. ವರದರಾಜಯ್ಯಂಗಾರ್, ಶ್ರೀಕಾಂತ ಪವರ್ ಪ್ರೆಸ್
೫೬೧, ರಾಮಚಂದ್ರ ಅಗ್ರಹಾರ, ಮೈಸೂರು

1734

ಮುನ್ನುಡಿ

ವಿದ್ಯಾಭ್ಯಾಸದ ಸರ್ವ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿಯೂ ದೇಶಭಾಷೆ ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗಬೇಕಾದುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದು ಒಬ್ಬಿಬ್ಬರು ಭಾಷಾಭಿಮಾನಿಗಳು ದುರುದ್ದೇಶದಿಂದಾಗಲಿ ಪಕ್ಷಪಾತ ಮನೋಭಾವ ದಿಂದಾಗಲಿ ಹೇಳುವ ಮಾತಲ್ಲ. ರಾಷ್ಟ್ರದ ಸರ್ವತೋಮುಖವಾದ ಪ್ರಗತಿ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವಿಕಾಸ—ಇವುಗಳ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸಿದ, ಕೂಲಂಕಷವಾದ ಚರ್ಚೆ ಮತ್ತು ಸರ್ವಂಕಷವಾದ ವಿಚಾರ ಮಥನಗಳ ಫಲವಾಗಿ ಸಿದ್ಧಿಸಿದ ತತ್ತ್ವವಿದು. ಡಾ|| ಅಮರನಾಥ ಝಾ ರಂಥ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರಿಂದ ಹಿಡಿದು ಮಹಾತ್ಮ ಗಾಂಧೀಜಿಯಂಥ ರಾಷ್ಟ್ರನಾಯಕರವರೆಗೆ ಎಲ್ಲರೂ ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದ ಸಾರ್ಥಕತೆ ಯನ್ನು ಒತ್ತಿಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಹಿಂದಿನ ಆಂಗ್ಲ ಸರ್ಕಾರ ನೇಮಿಸಿದ್ದ ಸ್ಯಾಡ್ಲರ್ ವಿಚಾರಣಾ ಸಮಿತಿ ಮತ್ತು ಹಾರ್ಟೋಗ್ ಸಮಿತಿಗಳೂ ಸರ್ ಚಾರ್ಲ್ಸ್ ವುಡ್, ಸರ್ ಸಾರ್ಜಂಟ್ ಮೊದಲಾದ ವಿದೇಶೀಯ ಶಿಕ್ಷಣತಜ್ಞರೂ ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮದಿಂದಲ್ಲದೆ ಭಾರತೀಯರ ಶಿಕ್ಷಣ ಸಫಲವಾಗದೆಂದೂ, ಸಮರ್ಪಕವಾಗದೆಂದೂ ಏಕಕಂಠದಿಂದ ಸಾರಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಶಿಕ್ಷಣಸೂತ್ರವನ್ನು ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡೇ ಭರತಖಂಡದ ಅನೇಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳಲ್ಲಿ ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ಕಾರ್ಯಗತವಾಗುತ್ತಿದೆ. ನಾಗಪುರ, ಅಲಹಾಬಾದ್, ಕಾಶಿ ಮೊದಲಾದ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳಿಂದ ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ ದೊರೆತ ವರದಿಗಳಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಆದರಪೂರ್ವಕವಾಗಿ ಅನಿರ್ಬಂಧವಾಗಿ ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿರುವುದೂ, ಅದರಿಂದ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶ ತುಂಬಾ ಆಶಾದಾಯಕವಾಗಿ ಗೋಚರಿಸುತ್ತಿರುವುದೂ ಸುಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತಿದೆ.

ದೇಶಭಾಷಾ ಮಾಧ್ಯಮ ಬೇಡವೆನ್ನುವ ಸಂಪ್ರದಾಯಶರಣರ ಸಂಖ್ಯೆ ಈಗೀಗ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಇಳಿಮುಖವಾಗುತ್ತಿದ್ದರೂ ಅಲ್ಲೊಬ್ಬರು

ಇಲ್ಲೊಬ್ಬರು ಇನ್ನೂ ಇದ್ದಾರೆ. ಅವರು ತಮ್ಮ ನಿಲುವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಕೊಡುವ ಮುಖ್ಯ ಕಾರಣಗಳಿವು :

೧. ದೇಶಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಅಥವಾ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಪದಗಳ ದಾರಿದ್ರ್ಯ.

೨. ಗ್ರಂಥಗಳ ಅಭಾವ.

೩. ವಿವಿಧ ಪ್ರಾಂತಗಳ ವಿದ್ವಾಂಸರ ಸಂಪರ್ಕಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಸರ್ಕಾರಿ ನೌಕರರ ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯಕ್ಕೆ ಅಡಚಣೆ.

ಈ ಕಾರಣಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣ ನಿರಾಧಾರವೆಂಬುದು ಕೆಳಗಣ ವಿವರಣೆಯಿಂದ ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ:

೧. ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಅಥವಾ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಹೊಸ ಹೊಸ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವ ಸಂಕಟಕ್ಕೆ ಗುರಿಯಾಗಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶಬ್ದಗಳನ್ನೇ ಇದ್ದಕ್ಕಿದ್ದಹಾಗೆಯೇ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳ ಬಹುದು. ಆವಶ್ಯಕತೆ ಕಂಡುಬಂದರೆ ಮಾತ್ರ ವಿವರಣಾತ್ಮಕವಾಗಿ ದೇಶಭಾಷೆಯ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅಂಕಿತನಾಮಗಳು ತಾನೆ! ಕೇಂದ್ರ ಸರ್ಕಾರದ ವಿದ್ಯಾಖಾತೆ ತಯಾರಿಸಿರುವ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಕೋಶ ಈ ತತ್ವವನ್ನೇ ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವೂ ಈ ಮಾರ್ಗವನ್ನೇ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅಂಗೀಕರಿಸಿದೆ.

೨. ಈಗಾಗಲೇ ಎಲ್ಲಾ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಗ್ರಂಥಗಳು ಹೊರಬೀಳುತ್ತಿವೆ. ಆವಶ್ಯಕತೆ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆಲ್ಲ ಅವುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿದೆ. ಪೇಟೆಯಲ್ಲಿ ಗಿರಾಕಿ ಇದೆಯೆಂದು ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕು, ಗ್ರಂಥಗಳು ಲೆಕ್ಕವಿಲ್ಲದೆ ಹೊರಬರುತ್ತವೆ.

೩. ಅಂತರರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಬಿಡುವುದಿಲ್ಲ ವಾದುದರಿಂದಲೂ, ಹಿಂದಿ ಅಥವಾ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯನ್ನು ಕಡ್ಡಾಯ ವಾಗಿ ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿಯ ಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದಲೂ ವಿದ್ವಾಂಸರ ಸಂಪರ್ಕಕ್ಕಾಗಲಿ, ಸರ್ಕಾರಿ

ನೌಕರರ ವಿನಿಮಯಕ್ಕಾಗಲಿ ಅಡಚಣೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ದೊಡ್ಡ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಸರ್ಕಾರಿ ನೌಕರರ ಸಂಖ್ಯೆ ಅತ್ಯಲ್ಪ ಭಾಗವೆನ್ನುವುದನ್ನೂ, ಈ ಅತ್ಯಲ್ಪ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸರ್ಕಾರಿ ನೌಕರರ ಹಿತಕ್ಕಾಗಿ ಇಡೀ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಕಲ್ಯಾಣವನ್ನು ಬಲಿಗೊಡುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನೂ ಮರೆಯು ಬಾರದು.

ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮವನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಪ್ರೀ-ಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ತರಗತಿಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಕಾರ್ಯರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಬಿ.ಎ., ಬಿ.ಎಸ್‌ಸಿ. ತರಗತಿಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಸುವ ಕಾರ್ಯವನ್ನೂ ಕೈಗೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಶ್ರೀಮಾನ್ ಬಿ. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರಿಗಳ "ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ" ಅದರ ಅಂಗವಾಗಿ ಹೊರಬರುತ್ತಿರುವ ಪುಸ್ತಕ. ಇನ್ನೂ ಹತ್ತಾರು ಪುಸ್ತಕಗಳು ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟನೆಗೆ ಸಿದ್ಧವಾಗಿವೆಯೆಂದು ಹೇಳಲು ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತದೆ.

ಶ್ರೀಮಾನ್ ಬಿ. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರಿಗಳು ಹಲವು ವರ್ಷಗಳ ಕಾಲ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ರೀಡರಾಗಿದ್ದು ಅನೇಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಆ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಬೋಧಿಸಿ ಗಾಢವೂ, ಅಗಾಧವೂ ಆದ ಅನುಭವವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇವರ ಈ ಗ್ರಂಥ ಸರ್ವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಾಗುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ.

ಮೈಸೂರು
೨೧-೩-೧೯೬೩

ಕೆ. ವಿ. ಪುಟ್ಟಪ್ಪ
ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕ ಮತ್ತು
ಪ್ರಕಟಣ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷ

ಅರಿಕೆ

ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸವು ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್ (calculus) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತಿರುವ ಗಣಿತಭಾಗ. ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲ್ (calcul) ಎಂದರೆ, ಎಣಿಕೆಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಕಲ್ಲುಹರಳು (pebble used for counting); ಕ್ಯಾಲ್‌ಕ್ಯುಲಸ್ ಎಂದರೆ, ಕಲನದ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸ (a mode of calculation) ಎಂದರ್ಥ. ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಸೂಕ್ಷ್ಮಾಂಶಗಳಿಗೆ (infinitesimals) ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕಲನ (calculation) ಅಥವಾ ಸೂಕ್ಷ್ಮಾಂಶ ವಿಜ್ಞಾನ. ಇದರಲ್ಲಿ ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ (differential calculus) ಮತ್ತು ಸಮಗ್ರಣ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ (integral calculus) ಎಂಬ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗವೇ ಈ ಪುಸ್ತಕದ ವಸ್ತು.

ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸವು ಶಾಸ್ತ್ರೀಯವಾದ ತಳಹದಿಯ ಮೇಲೆ ನಿಂತು ಪ್ರಬಲಿಸಿರುವುದು ಕ್ರಿ. ಶ. 17-18ನೆಯ ಶತಮಾನದ ನ್ಯೂಟನ್ (Newton) ಮತ್ತು ಲೈಬ್ನಿಸ್ (Leibnitz) ಎಂಬ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತ ಸಂಶೋಧಕರ ಕಾಲದಿಂದ ಈಚೆಗೆ. ಆದರೆ ಈ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಆಲೋಚನೆಯು ಇನ್ನೂ ಹಿಂದೆಯೇ ನಡೆದಿತ್ತು. ಕೇಂಬ್ರಿಜ್ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದಲ್ಲಿ ನ್ಯೂಟನ್‌ಗೆ ಹಿಂದೆ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಾಧ್ಯಾಪಕನಾಗಿದ್ದ ಐಸ್ಯಾಕ್ ಬ್ಯಾರೋ (Isaac Barrow) ಎಂಬಾತನು ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು (differential coefficient) ರೇಖಾ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅದನ್ನು ತನ್ನ ರೇಖಾಗಣಿತ ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ್ದನು. ಈ ಗ್ರಂಥವನ್ನು ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಲೈಬ್ನಿಸ್ ಇಬ್ಬರೂ ಅವಲೋಕಿಸಿದ್ದರೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ. ಆದರೂ ಈ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಫಲದಾಯಕವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸಾಯವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ನಡೆಸಿದವರು ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಲೈಬ್ನಿಸ್. ಆದ್ದರಿಂದ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸದ ಪಿತಾಮಹರೆಂಬ ಬಿರುದು ಅವರಿಗೇ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಹಿಂದೂ ಗಣಕರು (mathematicians) ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿ, ಸ್ಥಾನಭೇದಗಳನ್ನೂ ಸಂಕಲನಾದಿ ಅಂಕಗಣಿತ ವಿಧಾನಗಳನ್ನೂ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದ್ದರು. 1, 2, 3, . . . ಎಂಬ ಅಂಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳೂ ಹಿಂದೂ ಚಿಹ್ನೆಗಳೇ; ಅರ್ಯಾಬಿಕ್ ಅಲ್ಲ. ಬೀಜಗಣಿತ, ರೇಖಾಗಣಿತ, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರ ಮುಂತಾದ ಗಣಿತ ಭಾಗಗಳಲ್ಲೂ ವಿಜ್ಞಾನದ ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಈ ದೇಶದಲ್ಲಿ ವ್ಯವಸಾಯವು ನಡೆದಿತ್ತು. ಆದರೆ ಕ್ರಿ. ಶ. 12ನೆಯ ಶತಮಾನದಿಂದ 20ನೆಯ ಶತಮಾನದವರೆಗೆ ವಿಜ್ಞಾನವು ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯಶಃ ರಾಜಕೀಯ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಸುಪ್ತವಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ, ಆಗ ಅದು ಪಾಶ್ಚಿಮಾತ್ಯ ದೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ನಾವು ನಮ್ಮ ಭಾಷೆಗಳ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಶಬ್ದ ಸಂಪತ್ತಿಯನ್ನು ತ್ವರಿತವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ ಪ್ರಮೇಯವು ಒದಗಿದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ಸಂಸ್ಕೃತ ಭಾಷೆಯು ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ತಾಂತ್ರಿಕ (technical) ಪದಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಬಿಗಿ, ಬಿಕ್ಕಟ್ಟು ಆ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಸಂಸ್ಕೃತ ಪದಗಳು ಅನೇಕ ಹಿಂದೂ ಭಾಷೆಗಳಿಗೆ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ದೇಶದಲ್ಲಿ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಯೋಜನೆಗಳು ಪ್ರಬಲವಾಗಿಯೇ ನಡೆದಿರಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ, ಸಂಸ್ಕೃತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಪದಗಳು ಹೇರಳವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಒಂದು ಧ್ಯೇಯ ಅಥವಾ ಲಕ್ಷ್ಯವನ್ನು ಸಮಾಪಿಸು (tend to) ಎಂಬ ಅರ್ಥದ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ ಅಮರಸಿಂಹನು

ಸಮೀಪೇ ನಿಕಟಾಸನ್ನ ಸನ್ನಿಕೃಷ್ಟ ಸನೀಡವತ್ ।
ಸದೇಶಾಭ್ಯಾಶ ಸವಿಧ ಸಮರ್ಯಾದ ಸವೇಶವತ್ ।
ಉಪಕಂಠಾಂತಿಕಾಭ್ಯರ್ಣಾಭ್ಯಗ್ರಾ ಅಪ್ಯಭಿತೋಽವ್ಯಯಂ ॥

—ತೃತೀಯ ಕಾಂಡ, ವಿಶೇಷ್ಯ ನಿಘ್ನವರ್ಗ

ಎಂಬ ಹದಿನೈದು ಪದಗಳ ಗುಚ್ಛವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಇಂಥ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇನ್ನೂ ತಂಡೋಪತಂಡವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಶಬ್ದ ಕೋಟಿಯಿಂದ ಈಗ ನಾವು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಶಬ್ದಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ, ಸಮಾಸಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ; ಸೂಕ್ತವಾದ ಉಪಸರ್ಗಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅರ್ಥಪ್ರಭೇದಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಶಬ್ದ ಶೋಧನೆಯು ಸುಲಭವಾದುದಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಆಧುನಿಕ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಪದಗಳ ಅರ್ಥವು ಉತ್ಕಟವಾದ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಆಧುನಿಕ ವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಭಾರತೀಯ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತೊಡಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಲೇಖಕನೂ ಈ ಶಬ್ದ ಶೋಧನೆಗೆ ವಿಶೇಷ ಗಮನವನ್ನು ಕೊಡಲೇಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಮುಕ್ತಂ ಪೃಥುತಾ ಭಯೇನ ।
ನಾಂತೋಽಸ್ತಿ ಯಸ್ಮಾದ್ಗಣಿತಾರ್ಣವಸ್ಯ ॥

—ಭಾಸ್ಕರ.

ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸವು ಪುಷ್ಟವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ, ವಿಶಾಲವಾಗಿ ಪಸರಿಸಿದೆ. ಅದನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಬಿ.ಎಸ್ಸಿ. ಪ್ರಶಸ್ತಿಯ ಆಯಕಟ್ಟಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಕ್ಕೆ ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ A.F.R.V., ಎಂದರೆ ನನ್ನ Analysis of Functions of Real Variables ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದೆ. ಉತ್ತರಗಳನ್ನೂ, ಮುದ್ರಣದ ಹಾಳೆಗಳನ್ನೂ ನನ್ನ ಚಿರಂಜೀವಿ ಬಿ. ಎಸ್. ರಮೇಶ್, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ. ಅವಲೋಕಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನನ್ನಿಂದ ಬರೆಯಿಸಿ, ಪ್ರಕಾಶಪಡಿಸಿರುವ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಶ್ರಮಸಾಧ್ಯವಾದ ಈ ಮುದ್ರಣಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿರುವ ಶ್ರೀಕಾಂತ ಪವರ್ ಪ್ರೆಸ್ಸಿನ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೂ ನಾನು ತುಂಬಾ ಋಣಿ.

ಕೇಂದ್ರ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಶಾಲೆ
(Central College)
ಬೆಂಗಳೂರು

ಬಿ. ಸೀತಾರಾಮಶಾಸ್ತ್ರೀ

ಪರಿವಿಡಿ

(CONTENTS)



ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ

ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ
DIFFERENTIAL CALCULUS

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿಗಳು (functions, continuity and limits)

1.1. ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳು ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಿಗಳು (variables and constants).

ದತ್ತ ಗಣಿತ ಸನ್ನಿವೇಶವೊಂದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪರಿಮಾಣವು (quantity) ಬದಲಾಗುತ್ತ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೂಲ್ಯಗಳನ್ನು (values) ಹೊಂದುವುದಾಗಿರಬಹುದು; ಆದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಪರಿಮಾಣವು ಬದಲಾಗದೆ ಸದಾ ಒಂದೇ ಮೂಲ್ಯವುಳ್ಳದಾಗಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಗಿಡದಿಂದ ಉದುರಿ ಬೀಳುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಸೇಬು ಹಣ್ಣಿನ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಹಣ್ಣಿನ ವೇಗವು (velocity) ಕ್ಷಣೇ ಕ್ಷಣೇ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ಹಣ್ಣಿನ ವಸ್ತುತ್ವವು (mass) ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಮೂಲ್ಯಗಳನ್ನು ತಾಳುವ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ವಿಸ್ವಭಾವಿ (ವಿಕಾರಿ, ವಿರೂಪಿ, variable) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಒಂದೇ ಮೂಲ್ಯವುಳ್ಳ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಸ್ಥಿರಿ (constant) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಲ ಮತ್ತು ವೇಗಗಳು ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳು; ವಸ್ತುತ್ವವು ಸ್ಥಿರಿ.

ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳನ್ನು x, y, z ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ, ಸ್ಥಿರಿಗಳನ್ನು a, b, c ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸಂಕೇತಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ.

ಒಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು 1, 2, 3, . . . ಮುಂತಾದ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮೂಲ್ಯಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತಾಳುವುದಾದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ **ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ವಿಸ್ವಭಾವಿ** (positive integral variable) ಎಂದು ಹೆಸರು; ಮತ್ತು ಅದನ್ನು n, m ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುವುದು.

1.11. ಅವಧಿಗಳು (intervals).

x ಎಂಬ ಒಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು a, b $(a<b)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು a, b ಗಳಿಗೆ ಅಂತರ್ಗತವಾದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ತಾಳುವುದಾದರೆ, ಆಗ x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಅವಧಿಯು $a \leqslant x \leqslant b$ ಎಂಬ **ಆವೃತಾವಧಿ** (closed interval) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಿಲ್ಲದ $a < x < b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು ಎರಡು ಕೊನೆಗಳಲ್ಲೂ **ಅನಾವೃತ**ವಾದುದು (open at both the ends) ಹೀಗೆಯೇ, $a < x \leqslant b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು ಎಡಗಡೆಯಲ್ಲೂ, $a \leqslant x < b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು ಬಲಗಡೆಯಲ್ಲೂ ಅನಾವೃತವಾದುವು.

1.12. ಸ್ವತಂತ್ರ ಮತ್ತು ಅವಲಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳು (independent and dependent variables).

ಒಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಬೆಲೆಗಳು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಬೆಲೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರಬಹುದು (connected), ಅಥವಾ ಹಾಗಿರದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರಬಹುದು. § 1.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸೇಬುಹಣ್ಣಿನ ವೇಗವು ಕಾಲದೊಂದಿಗೆ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿದೆ; ಎಂದರೆ, ಹಣ್ಣು ಬೀಳುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಎಷ್ಟು ಕಾಲವಾಯಿತೆಂಬುದು ದತ್ತವಾದರೆ, ಆಗ ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ ವೇಗದ ಬೆಲೆಯು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಕಾಲವೆಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿ; ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಯೋಜಿತವಾಗಿರುವ ವೇಗವು ಸಂಯೋಜಿತ ಅಥವಾ ಅವಲಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿ.

1.2. ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (functions).

x ಎಂಬ ಒಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ (ಜವಾಬಾಗಿ, ಅಭಿವಾದಿಯಾಗಿ, corresponding to) y ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಬೆಲೆ ಅಥವಾ ಬೆಲೆಗಳು, ದತ್ತ ನಿಯಮ ಅಥವಾ ನಿಯಮಗಳ ಮೂಲಕ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಾದರೆ, ಆಗ y ಎಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು x ಎಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಒಂದು **ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ** (function) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

x ಮತ್ತು y ಗಳ ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪಕ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಂವಾದಿಯಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂಬ ಭರವಸೆಯೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, y ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು x ನ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾದರೆ, ವಿಲೋಮವಾಗಿ (inverse) x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು y ನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿರುವುದು ಕೆಲವು ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ (conditions) ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

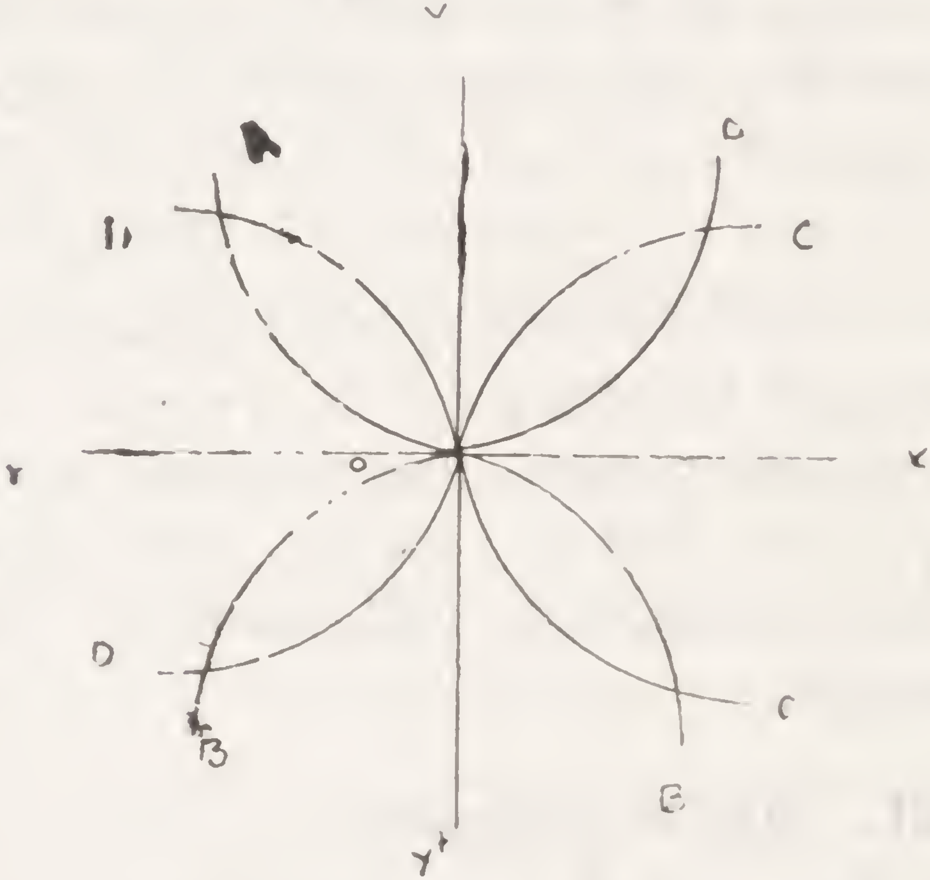
ಅನುಸ್ಥಾಪಕ ಸಂಬಂಧವು $y = f(x)$, $y = u(x)$ ಮುಂತಾದ ಸಂಕೇತಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿ; y ಎಂಬುದು ಸಂಯೋಜಿತ ವಿಸ್ವಭಾವಿ ಅಥವಾ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. x ನ ಬೆಲೆ ಸ್ಥಾಪಿತವಾದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ y ನ ಬೆಲೆ ಅನುಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

1.21. ನಕ್ಷೆಗಳು (graphs).

$y = f(x)$ ಆಗುವಂತೆ (x, y) ಬಿಂದುಗಳನ್ನುಳ್ಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಅನೇಕವೇಳೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ನಕ್ಷೆಗಳ ರಚನೆಗೆ ವಿಶೇಷ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾಗಬಹುದು. (ಅಧ್ಯಾಯ XVI). ಕೆಲವು ವೇಳೆ ನಕ್ಷೆಯು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. (ಆಕೃತಿ 1–4).

1.22. ಏಕಮೂಲ್ಯ ಮತ್ತು ಬಹುಮೂಲ್ಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (single-valued and many-valued functions).

x ಎಂಬ ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು ತಾಳುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ y ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಒಂದು ಬೆಲೆ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದಾದರೆ, ಆಗ $y=f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು **ಏಕಮೂಲ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆ** (single-valued function) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹಾಗಲ್ಲದೆ, x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ y ಗೆ ಅನೇಕ ಬೆಲೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು **ಬಹುಮೂಲ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆ** (many-valued function) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 1–1

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y=x^2$ ಮತ್ತು $y=-x^2$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಏಕಮೂಲ್ಯವಾದುವು.

$y=\pm\sqrt{x},\ x\geqslant 0$, ಮತ್ತು $y=\pm\sqrt{(-x)},\ x\leqslant 0$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ದ್ವಿಮೂಲ್ಯವಾದುವು (double-valued).

ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿ 1–1 ರಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ A, B, C, D ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಏಕಮೂಲ್ಯವಾದುವು.

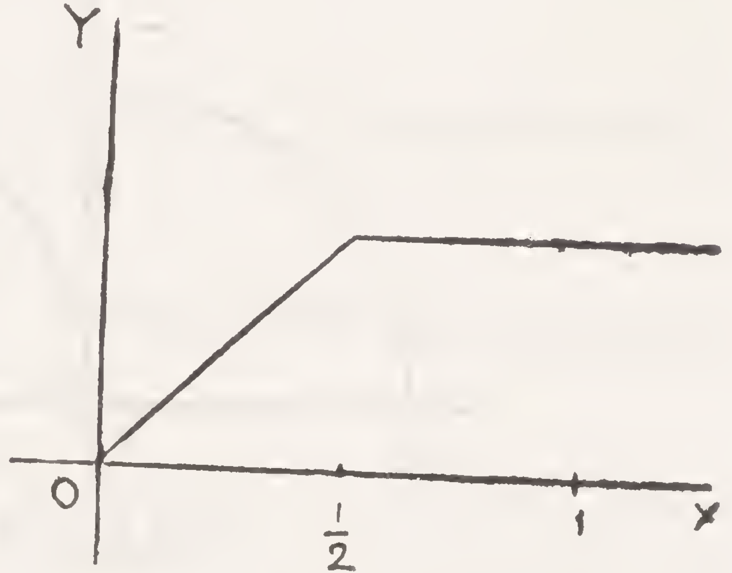
ಅನುಸ್ಥಾಪಕ ನಿಯಮವು ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ದತ್ತವಾಗಿರದೆ ಇತರ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$0 \leqslant x \leqslant 1$ ಎಂಬ ಆವೃತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ:

$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ ಆದಾಗ $y = x$,

$\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ ಆದಾಗ $y = \frac{1}{2}$



ಆಕೃತಿ 1–2

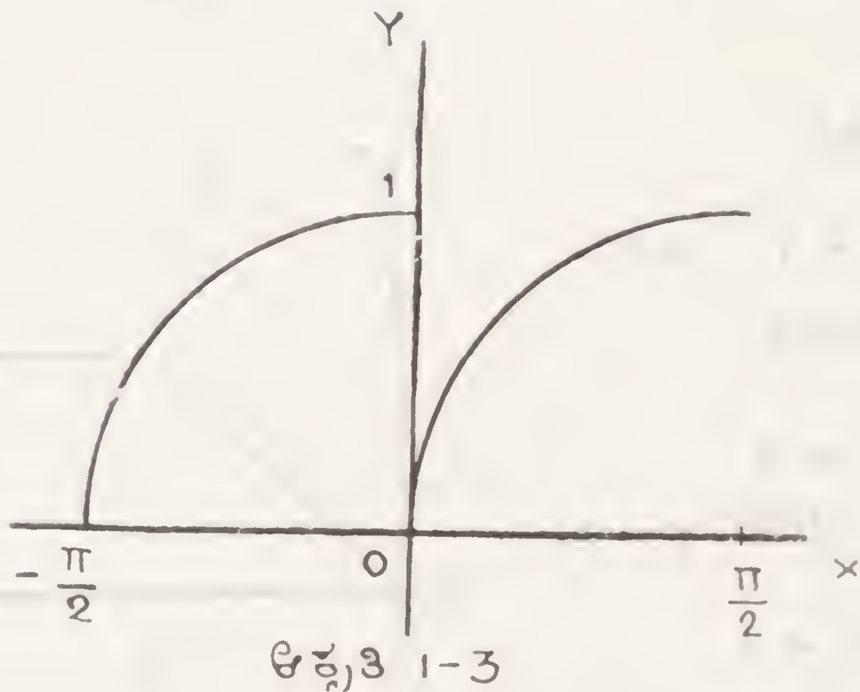
ಎಂಬ ನಿಯಮವು ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪಕ ನಿಯಮ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ನಿಯಮದಿಂದ ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ y ನ ಬೆಲೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 1–2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ:

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ ಎಂಬ ಆವೃತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0 \text{ ಆದಾಗ } y = \text{ಕಾಸ್ } x,$$

$$0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad ,, \quad y = \text{ಸೈನ್ } x,$$



ಆಕೃತಿ 1-3

ಎಂಬುದೊಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. ಇದರ ನಕ್ಷೆಯು (ಆಕೃತಿ 1–3) O ಎಂಬ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (origin) ಭಿನ್ನವಾಗಿದೆ.

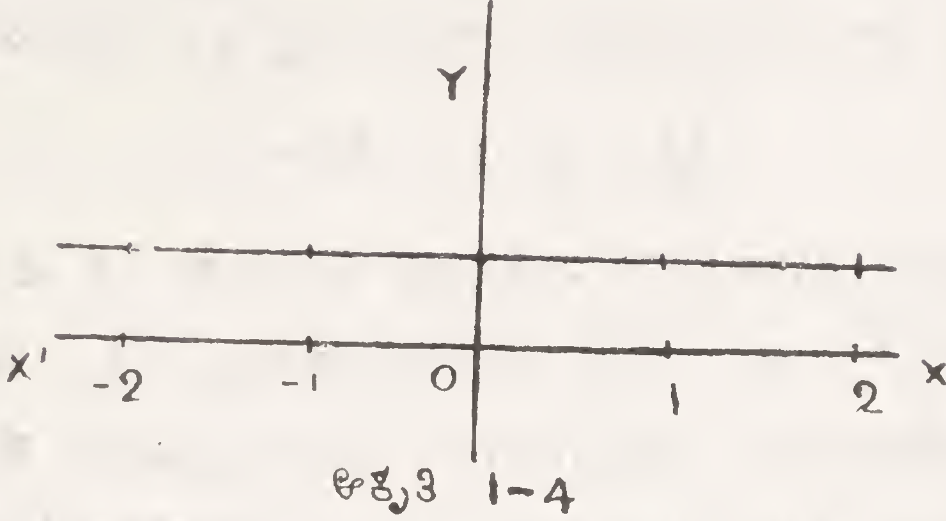
ಮತ್ತೆ, $-\infty < x < \infty$ ಎಂಬ ಅನಂತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ

x ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ ಮತ್ತು $x = 0$ ಆದಾಗ $y = 0$,

ಮತ್ತು x ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ $y = 1$

ಎಂಬ ವಿಧಾಯಕವು ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಹಾಕುವುದು ವಸ್ತುತಃ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ಎಂಬ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ $y=1$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ, x – ಅಕ್ಷದಮೇಲೆ ಅವುಗಳ ಅನುಬಿಂದುಗಳನ್ನು



ಆಕೃತಿ 1–4

ಹಾಕಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ, ಆಕೃತಿ 1–4 ನ್ನು ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಸ್ಥೂಲವಾದ ನಕ್ಷೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

1.23. ಏಕಾಯನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (monotonic functions).

ದತ್ತ x – ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ x_1, x_2 $(x_2 > x_1)$ ಎಂಬ ಯಾವ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ $f(x_2) \geq f(x_1)$ ಆದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು **ಆರೋಹಿ** (increasing) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ; $x_2 > x_1$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(x_2) \leq f(x_1)$ ಆದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು **ಅವರೋಹಿ** (decreasing) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆರೋಹಿ ಮತ್ತು ಅವರೋಹಿ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ **ಏಕಾಯನ** ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (monotonic functions) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = x^2$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $-\infty < x \leq 0$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವರೋಹಿ, ಮತ್ತು $0 \leq x < \infty$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಆರೋಹಿ (ಆಕೃತಿ 1–1).

1·24. ಬಂಧನಗಳು (bounds).

ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಲಿ, ದತ್ತ x – ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$$M \geq f(x) > M - \epsilon$$

ಆಗುವಂತೆ $f(x)$ ನ ಒಂದು ಮೂಲ್ಯವು ಸಿಗುವಂಥ M ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ **ಉದ್ಬಂಧಿತವಾಗಿದೆ** (bounded above) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು M ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯು $f(x)$ ನ **ಉದ್ಬಂಧನ** (upper bound) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$m \leq f(x) < m + \epsilon$$

ಆಗುವಂತೆ $f(x)$ ನ ಒಂದು ಮೂಲ್ಯವು ಸಿಗುವಂಥ m ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ **ಅಧೋಬಂಧಿತವಾಗಿದೆ** (bounded below) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು m ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯು $f(x)$ ನ **ಅಧೋಬಂಧನ** (lower bound) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಒಂದು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಮೇಲುಗಡೆ, ಅಥವಾ ಕೆಳಗಡೆ, ಅಥವಾ ಎರಡುಕಡೆಯೂ ಬಂಧನರಹಿತವಾಗಿ (unbounded) ಇದ್ದರೂ ಇರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

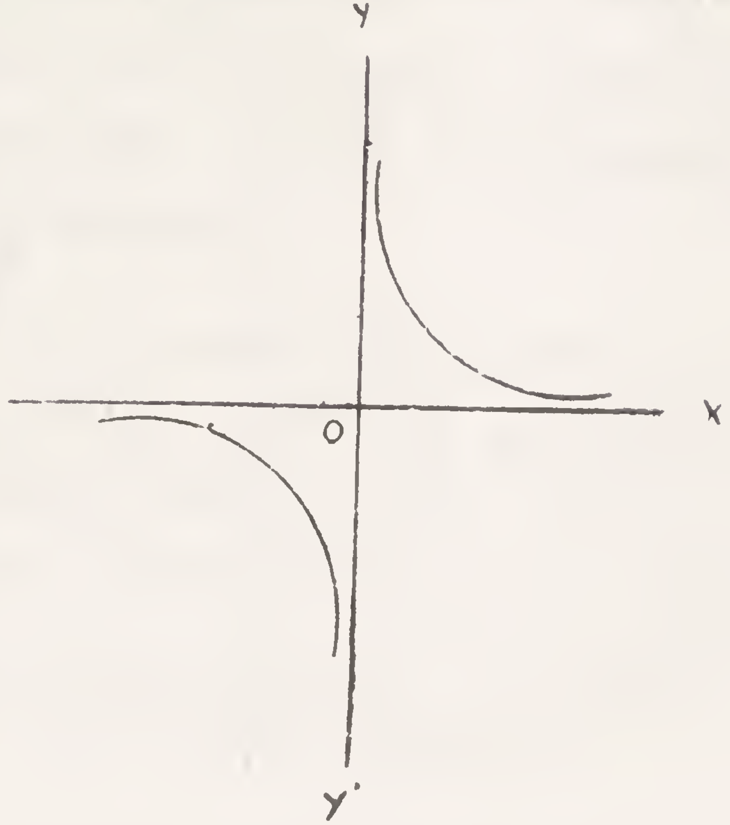
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad \text{ಮತ್ತು} \quad f(0) = 0$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ (ಆಕೃತಿ 1–5), $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ಬಂಧನವಾಗಲಿ ಅಧೋಬಂಧನವಾಗಲಿ ಇಲ್ಲ.

$-\infty < x < 0$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅಧೋಬಂಧನವಿಲ್ಲ, ಉದ್ಬಂಧನ 0.

$0 < x < \infty$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ಬಂಧನವಿಲ್ಲ, ಅಧೋಬಂಧನ 0.

$1 \leqslant x \leqslant 2$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಉದ್ಬಂಧನ 1, ಅಧೋಬಂಧನ $\frac{1}{2}$.



ಆಕೃತಿ 1–5

ಮತ್ತೆ $0 \leqslant x \leqslant 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ :

$0 < x \leqslant 1$ ಆದಾಗ $f(x) = x$, ಮತ್ತು $f(0) = 2$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಉದ್ಬಂಧನ 2, ಮತ್ತು ಅಧೋಬಂಧನ 0.

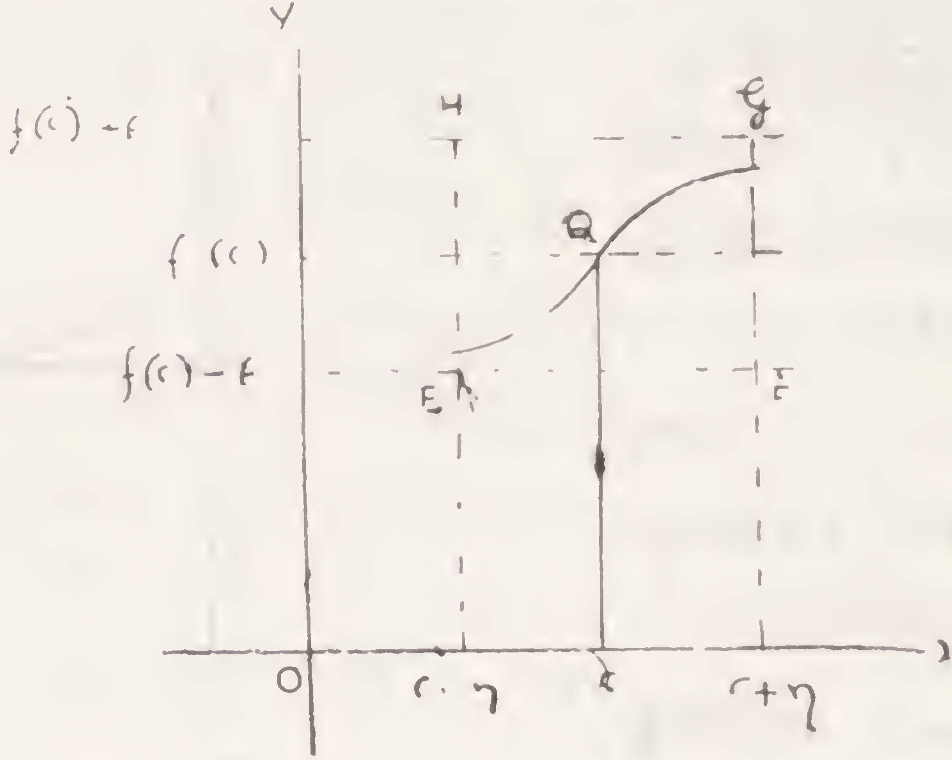
1·3. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ (continuity).

ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಲಿ, η ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು

$|x-c|\ \eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|f(x)-f(c)| < \epsilon$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ $x = c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ (continuous) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುವುದು.

ಆಕೃತಿ 1-6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, $y = f(c)$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲುಗಡೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಡೆ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿ HG, EF



ಆಕೃತಿ 1-6

ಎಂಬ ಯಾವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆದರೂ, ತದನುಗುಣವಾಗಿ c ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಬಲಕ್ಕೆ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿ EH, FG ರೇಖೆಗಳನ್ನು, EH, FG ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ $y = f(x)$ ರೇಖೆಯು EF, HG ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆಯೂ ಇರುವಂತೆ, ಎಳೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬೇಕೆಂಬುದೇ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ನಿರೂಪಣೆಯ (definition) ರೇಖಾರ್ಥ (geometrical meaning).

c ಬಿಂದುವು ದತ್ತ x – ಅವಧಿಯ ಬಲಗಡೆಯ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $|x - c| < \eta$ ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯು (ವಿಷಮ, inequality) $c - \eta < x \leqslant c$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ c ಬಿಂದುವು ದತ್ತ x – ಅವಧಿಯ ಎಡಗಡೆಯ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $|x - c| < \eta$

ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯು $c \leqslant x < c+\eta$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. [§ 1.4].

$f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಒಂದು ದತ್ತ ಅವಧಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದು ಆ **ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ**ವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y=x^2$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು (ಆಕೃತಿ 1–1) ಎಲ್ಲ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದುದು. ಆಕೃತಿ 1–2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದುದು. ಆಕೃತಿ 1–3 ಮತ್ತು 1–5 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ $x=0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿಯಿದೆ (discontinuity). ಆಕೃತಿ 1–4 ರ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ಎಂಬ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿಗಳಿವೆ.

1.31. ಆವೃತ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳು (general properties of continuous functions in closed intervals).

$f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $a \leqslant x \leqslant b$ ಎಂಬ ಆವೃತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ :

(i) $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಮೇಲುಗಡೆಯೂ, ಕೆಳಗಡೆಯೂ ಬಂಧಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ;

(ii) $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಬಂಧನಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದುಸಲವಾದರೂ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $f(x)$ ನ ಬಂಧನಗಳು m ಮತ್ತು M ಆದರೆ, $f(x_1)=m$, $f(x_2)=\mathrm{M}$ ಆಗುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು x_1 ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು x_2 ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ;

(iii) $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ತನ್ನ ಬಂಧನಗಳಿಗೆ ಅಂತರ್ಗತವಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದುಸಲವಾದರೂ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $m < c < M$ ಆಗುವಂತೆ ಯಾವ c ಸಂಖ್ಯೆಯು ದತ್ತವಾದರೂ, $f(x_1) = c$ ಆಗುವಂತೆ ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು x_1 ಬಿಂದುವಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ;

(iv) $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಏಕಪ್ರಕಾರವಾಗಿ (uniformly) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಲಿ, xನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸದಿರುವ η ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$|x_1 - x_2| < \eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

ಈ ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಗಳ ಸಾಧನೆಗಳಾಗಲಿ ಅನಾವೃತ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ವಿಚಾರವಾಗಲಿ ಪ್ರಕೃತವಲ್ಲ. [A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ II, § 3·32, ಪುಟ 61 ನೋಡಿ.]

1.4. ಪರಿಮಿತಿಗಳು (limits).

ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಲಿ, η ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು,

$0 < |x - c| < \eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|f(x) - l| < \epsilon$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸಿದಾಗ (tends to) $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು l ಎಂಬ ಪರ್ಯಾಪ್ತ (finite) ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು l ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ **ಪರಿಮಿತಿ** (limit) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ

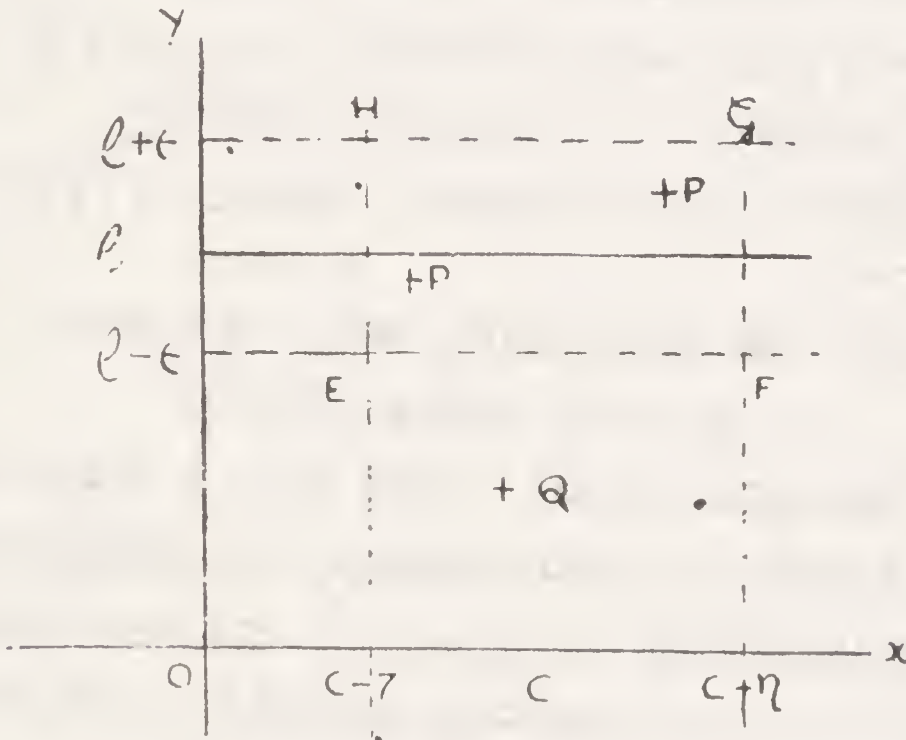
$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x \to c} f(x) = l$$

ಅಥವಾ

$$x \to c \text{ ಆದಾಗ, } f(x) \to l$$

ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಗ್ರಹಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಆಕೃತಿ $1-7$ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. $y = l$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲುಗಡೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಡೆ ಸಮ ದೂರದಲ್ಲಿ $y = l + \epsilon$, $y = l - \epsilon$ ಎಂಬ ಯಾವ ಎರಡು



ಆಕೃತಿ 1-7

ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆದರೂ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $x = c + \eta$ $x = c - \eta$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು, $(c - \eta,\ c + \eta)$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $x = c$ ಅಲ್ಲದ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ $P(x, y)$ ಬಿಂದುವು EFGH ಎಂಬ ಆಯುಕಟ್ಟಿನ (rectangle) ಒಳಗಡೆ ಇರುವಂತೆ, ಎಳೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗ

ಬೇಕೆಂಬುದೇ ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯ ರೇಖಾರ್ಥ. $f(c)$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ದತ್ತವಾಗಿರಬೇಕಾದ್ದಿಲ್ಲ; ಒಂದು ವೇಳೆ ಅದು ದತ್ತವಾಗಿದ್ದರೂ, Q $[c, f(c)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಆಕೃತಿ 1 – 7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ EFGH ಎಂಬ ಆಯದ ಹೊರಗಡೆ ಇದ್ದಾಗ್ಯೂ ಬಾಧಕವಿಲ್ಲ.

$|f(x)-l| < \epsilon$ ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯನ್ನು (ವಿಷಮ, inequality) $l-\epsilon < f(x) < l+\epsilon$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಲ್ಲದೆ, $f(x) \to l$ ಆದಾಗ $f(x) = l + \rho$, ಸಂಗತ $\rho \to 0$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಮಾತ್ರ ಸಮಿಾಪಿಸುವುದಾದರೆ, ಆಗ ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $0 < |x-c| < \eta$ ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯು $c < x < c+\eta$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಆಗ ಪರಿಮಿತಿಯ ಸಂಕೇತವು

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x \to c+0} f(x) = l, \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x \to c+} f(x) = l$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹ್ರಸ್ವವಾಗಿ

$$f(c+0) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad f(c+)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವುದೂ ವಾಡಿಕೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಮಾತ್ರ ಸಮಿಾಪಿಸುವುದಾದರೆ, ಪರಿಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $0 < |x-c| < \eta$ ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯು $c-\eta < x < c$ ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಆಗ ಪರಿಮಿತಿಯ ಸಂಕೇತವು

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x \to c-0} f(x) = l, \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x \to c-} f(x) = l$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಹ್ರಸ್ವವಾಗಿ

$$f(c-0) \quad \text{ಅಥವಾ} \quad f(c-)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುವುದೂ ವಾಡಿಕೆ.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪರಿಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಗೂ § 1·3 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ನಿರೂಪಣೆಗೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಪರಿಮಿತಿಯ

ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $0<|x-c|<\eta$ ಎಂದು ಇರುವಕಡೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $|x-c|<\eta$ ಎಂದಿದೆ; ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ l ಇರುವ ಕಡೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $f(c)$ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to c} f(x)=f(c)$$

ಆದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=c$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದಂತಾಯಿತು. ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನೂ ಹೀಗೆಯೇ ಮಾರ್ಪಡಿಸಬಹುದು. $a\leqslant x\leqslant b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(a+o)=f(a)$ ಆದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=a$ ಎಂಬ ಎಡ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಇದೇ ರೀತಿ $f(b-o)=f(b)$ ಆದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=b$ ಎಂಬ ಬಲ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಪರಿಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ ;

$$x\neq 0 \quad \text{ಆದಾಗ} \quad f(x)=2x+1,$$

ಮತ್ತು

$$x=0 \quad ,, \quad f(x)=0$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x\to 0$ ಆದಾಗ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ಪ್ರಭವದಿಂದ (ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ, ab initio, from first principles) ತೋರಿಸೋಣ. ಪರಿಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ $x=0$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ್ದಿಲ್ಲವಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x\neq 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ϵ ಎಂಬುದು ಒಂದು ದತ್ತ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ $|f(x)-1|=|2x|<\epsilon$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, $|x|<\epsilon/2$ ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $\epsilon/2$ ಗೆ ಸಮವಾದ, ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದಾದ, ಯಾವ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾದರೂ η ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಮಸಲ, $\epsilon=\frac{1}{10}$ ಆದರೆ $\eta=\frac{1}{20}$ ಆಗಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\epsilon(>0)$ಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಒಂದು $\eta(>0)$ವನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ $x \to 0$ ಆದಾಗ, $f(x) \to 1$. ಇಲ್ಲಿ $f(x)$ ನ ಪರಿಮಿತಿಯು $f(0)$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಲ್ಲ. $f(0)=0$ ಎಂಬ ಬದಲು $f(0)=1$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿದ್ದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಪರಿಮಿತಿಯು $f(0)$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತಿತ್ತು, ಮತ್ತು $x=0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತಿತ್ತು. ಒಂದು ವೇಳೆ $f(0)$ ನ ಬೆಲೆಯು ದತ್ತವಾಗದಿದ್ದರೂ $f(x)$ ನ ಪರಿಮಿತಿಗೆ ಯಾವ ಆಪೋಹವೂ ಇಲ್ಲ.

ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಲಿ, x_0 ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯುನ್ನು,

$$x > x_0 \text{ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ } |f(x) - l| < \epsilon$$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ $x \to \infty$ ಆದಾಗ $f(x) \to l$ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

$\triangle$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, $\triangle$ ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಲಿ, ಎಂಬ η ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯುನ್ನು

$$0 < |x - c| < \eta \text{ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ } f(x) > \triangle$$

ಆಗುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ $x \to c$ ಆದಂತೆ $f(x) \to \infty$ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

$x \to \infty$ ಆದಾಗ $f(x) \to \infty$, $x \to -\infty$ ಆದಾಗ $f(x) \to l$ ಮುಂತಾದ ಪರಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಇದೇ ರೀತಿ ನಿರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

1.41. ಪರಿಮಿತಿಗಳು ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತ ವಿಧಾನಗಳು (limits and arithmetical processes)

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗಳಲ್ಲಿ (theorems) u, v ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳು $u(x)$, $v(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತವೆ.

x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು c ಎಂಬ ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತಸ್ಥಿರಿಯನ್ನು ಸಮಿಾಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದೂ, ಪರಿಮಿತಿಗಳು ಅನಂತವಲ್ಲವೆಂದೂ ಅಧ್ಯಾಹಾರ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಪರಿಮಿತಿಗಳು ಅನಂತವಾದಾಗ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

(1). ಪರಿಮಿತಿ $(u+v)$ = ಪರಿಮಿತಿ u + ಪರಿಮಿತಿ v.

ಸಾಧನೆ: ಪರಿಮಿತಿ $u=l$, ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿ $v=l'$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $\epsilon>0$ ದತ್ತವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಪರಿಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ದತ್ತ ϵ ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, η_1, η_2 ಎಂಬ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು,

$0<|x-c|<\eta_1$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|u-l|<\epsilon/2$,
ಮತ್ತು $0<|x-c|<\eta_2$,, $|v-l'|<\epsilon/2$
ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈಗ

ಕನಿಷ್ಠ $(\eta_1, \eta_2)=\eta$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ; ಎಂದರೆ, η_1, η_2 ಗಳ ಪೈಕಿ ಚಿಕ್ಕದನ್ನು η ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಆಗ,

$0<|x-c|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ
$$|(u+v)-(l+l')| \leq |u-l|+|v-l'| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$
ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$$(u+v)\to l+l'$$

(2). ಪರಿಮಿತಿ $(-v)$ = $-$(ಪರಿಮಿತಿ v).

ಸಾಧನೆ: $|(-v)-(-l')|=|v-l'|$.
ಈಗ, $v\to l'$. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ϵ (>0)ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ $\eta>0$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು,

$0<|x-c|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|v-l'|<\epsilon$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. x ನ ಅಂಥ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆಲ್ಲ $|(-v)-(-l')| < \epsilon$ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ, $-v \to -l'$.

(**3**). ಪರಿಮಿತಿ (uv) = (ಪರಿಮಿತಿ u).(ಪರಿಮಿತಿ v).

ಸಾಧನೆ :
$$\begin{aligned}|uv-ll'| &= |uv-ul'+ul'-ll'| \\ &= |u(v-l')+l'(u-l)| \\ &\leqslant |u| \cdot |v-l'| + |l'| \cdot |u-l|.\end{aligned}$$

$u \to l$. ಆದ್ದರಿಂದ $(c-\delta, c+\delta)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ $x \neq c$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $l-\frac{1}{2} < u(x) < l+\frac{1}{2}$ ಆಗುವಂತೆ δ ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಈಗ, ಗರಿಷ್ಠ $(|l-\frac{1}{2}|, |l+\frac{1}{2}|) = M$ ಆದರೆ, – ಎಂದರೆ, $|l-\frac{1}{2}|$, $|l+\frac{1}{2}|$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೈಕಿ ದೊಡ್ಡದನ್ನು M ಎಂದು ಕರೆದರೆ–, $(c-\delta, c+\delta)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ $|u(x)| < M$, $(x \neq c)$, ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಅಂತರದಲ್ಲಿ

$$|uv-ll'| < M \cdot |v-l'| + |l'| \cdot |u-l|,$$

$x \neq c$. ಈಗ ϵ ಎಂಬ ದತ್ತ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ η_1, η_2 ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು,

$0 < |x-c| < \eta_1$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|u-l| < \dfrac{\epsilon}{2|l'|}$,

ಮತ್ತು $0 < |x-c| < \eta_2$,, $|v-l'| < \dfrac{\epsilon}{2M}$

ಆಗುವಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಈಗ, ಕನಿಷ್ಠ $(\eta_1, \eta_2, \delta) = \eta$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, $0 < |x-c| < \eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ

$$|uv-ll'| < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + |l'| \cdot \frac{\epsilon}{2|l'|} = \epsilon$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $uv \to ll'$.

(4). ಪರಿಮಿತಿ $\frac{1}{v}=\frac{1}{\text{ಪರಿಮಿತಿ } v}$, (ಪರಿಮಿತಿ $v)\neq 0$.

ಸಾಧನೆ : $\left|\frac{1}{v}-\frac{1}{l'}\right|=\frac{|v-l'|}{|v|\cdot|l'|}$.

$v\to l'\neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ $(c-\delta,\ c+\delta)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ $x\neq c$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $l'-\left|\frac{l'}{2}\right|<v(x)<l'+\left|\frac{l'}{2}\right|$ ಆಗುವಂತೆ δ ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ

$$\text{ಕನಿಷ್ಠ}\left\{\left|l'-\frac{|l'|}{2}\right|,\ \left|l'+\frac{|l'|}{2}\right|\right\}=m$$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ, $(c-\delta,\ c+\delta)$ ಅಂತರದಲ್ಲಿ $x\neq c$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|v(x)|>m>0$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು

$$\left|\frac{1}{v}-\frac{1}{l'}\right|<\frac{|v-l'|}{m\,|l'|}$$

ಈಗ, $\epsilon>0$ ದತ್ತವಾದರೆ, ತದನುಗುಣವಾಗಿ η_1 ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, $0<|x-c|<\eta_1$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $|v-l'|<\epsilon m\,|l'|$ ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕನಿಷ್ಠ $(\eta_1,\ \delta)=\eta$ ಆದರೆ, ಆಗ $0<|x-c|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $\left|\frac{1}{v}-\frac{1}{l'}\right|<\frac{\epsilon m\,|l'|}{m\,|l'|}=\epsilon$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ,

$$\frac{1}{v}\to\frac{1}{l'}$$

1·42. ನೇಪಿಯರನ ಸ್ಥಿರ (Napier's constant).

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $n\to\infty$ ಆದಾಗ, e ಎಂಬ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ಈಗ ಸಾಧಿಸಲಾಗುವುದು.

ದತ್ತ $f(n)$ ಎಂಬ ಕ್ರಮಾನುಸರಣೆಯು (ಅನುಕ್ರಮಿ, ಪರ್ಯಾಯ, sequence) ಆರೋಹಿಯೆಂದು ಮೊದಲು ತೋರಿಸೋಣ. ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸೂಚಕ ದ್ವಿಪದಿ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯು (binomial theorem for a positive integral index) ಪ್ರಕಾರ

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad \ldots (A)$$

$$\therefore f(n+1)=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

ಈ ಎರಡು ಶ್ರೇಣಿಗಳ (series) ಅನುಪದಗಳ (corresponding terms) ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ

$$f(n+1)>f(n),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಎಂದರೆ $f(n)$ ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತೆ, $f(n)$ ಗೆ ಉದ್ಬಂಧನವಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಮೇಲಿನ (A) ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ

$$f(n)<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

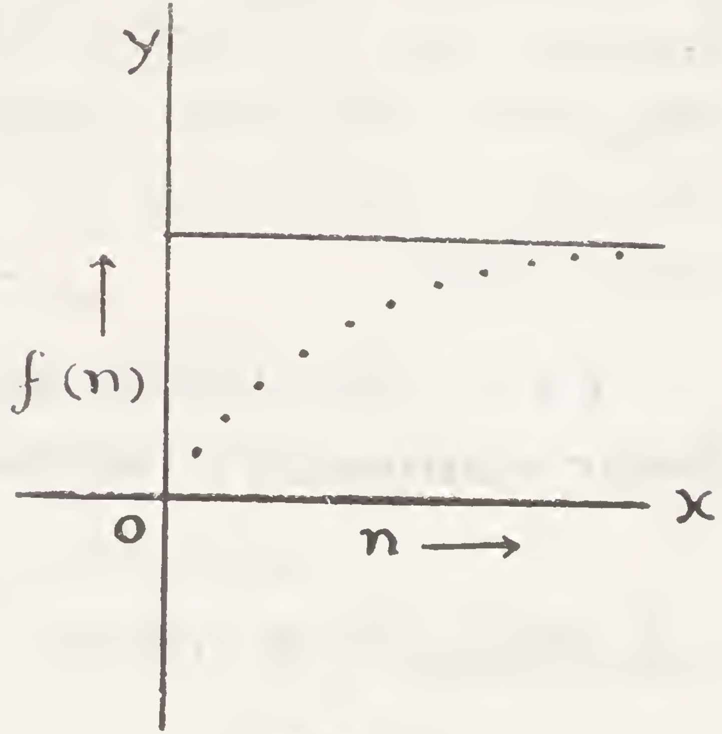
$$<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots \text{ಅನಂತವಾಗಿ}\right)$$

$$=1+2,$$ [ಅನಂತ ರೇಖಾಶ್ರೇಣಿಯ (G.P.) ಸಂಕಲನದಿಂದ]

ಹೀಗೆ $f(n)<3,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (ii)$

ಎಂದರೆ $f(n)$ ಗೆ ಉದ್ಬಂಧನವಿದೆ.

ಈಗ, ಆರೋಹಿಯಾದ ಒಂದು ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿಗೆ M ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಥೂಲವಾದ ಉದ್ಬಂಧನವಿದ್ದರೆ, ಆ ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿಯು $l(\leq M)$ ಎಂಬ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.



ಆಕೃತಿ 1–8

(ಆಕೃತಿ 1–8); ಹಾಗೆಯೇ ಅವರೋಹಿಯಾದ ಒಂದು ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿಗೆ m ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಥೂಲವಾದ ಅಧೋಬಂಧನವಿದ್ದರೆ, ಆ ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿಯು $(l \geq m)$ ಎಂಬ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ. (ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳ ಸಾಧನೆ ಇಲ್ಲಿ ಬೇಡ.)

ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ $f(n)$ ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿಯು 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅತಿಕ್ರಮಿಸದ e ಎಂಬ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ.

e ಎಂಬ ಈ ಪರಿಮಿತಿಯು ಒಂದು ಅಧಾರಣಾಂಕ (irrational number) ಅದರ ಬೆಲೆಯು 2·7182818 .... ಎಂಬ ಅನಾವರ್ತ ಅನಂತ ದಶಮಾಂಶ (non-recurring, non-terminating decimal) ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ "ನೇಪಿಯರನ ಸ್ಥಿರಿ" ಎಂದು ಹೆಸರು.

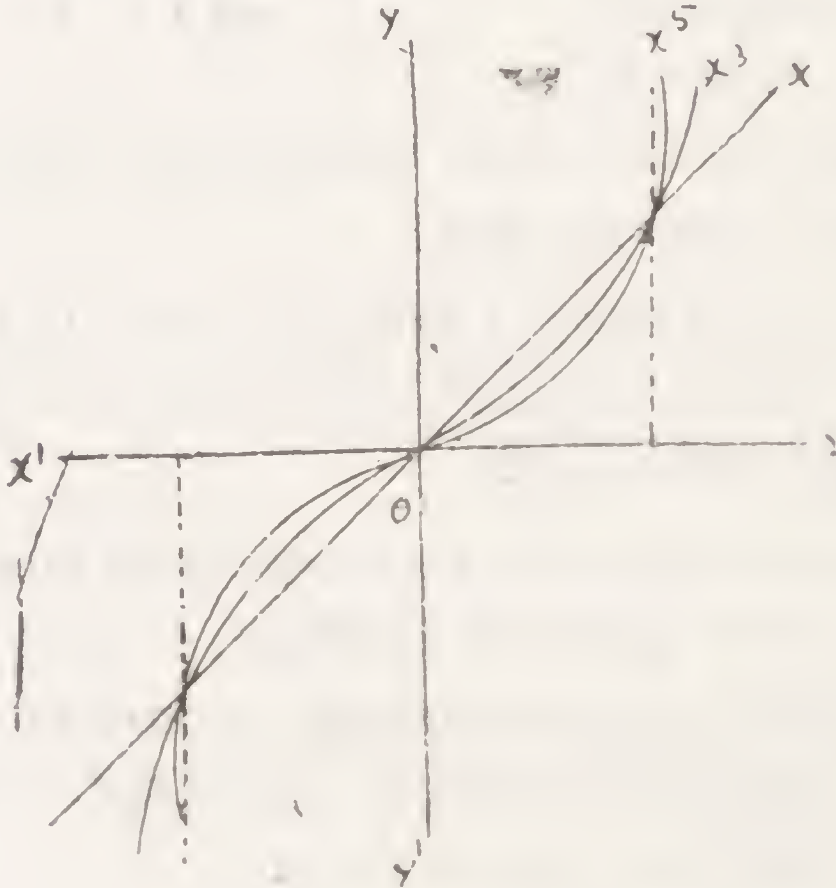
1·5. ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (elementary functions).

ಮಿಶ್ರ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ರಚನೆಯು (structure of composite functions) ಕೆಲವು ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ವಿಸ್ತಾರವಾದ ವಿವರಣೆಯು ಬೀಜಗಣಿತ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಗಳಿಗೆ ಸೇರಿದುದು. ಇಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿ (mention), ಅವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ರೂಢ ಪರಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗುವುದು.

1·51. ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ (algebraic elementary function).

$$x^n, n = 1, 2, 3, \dots$$

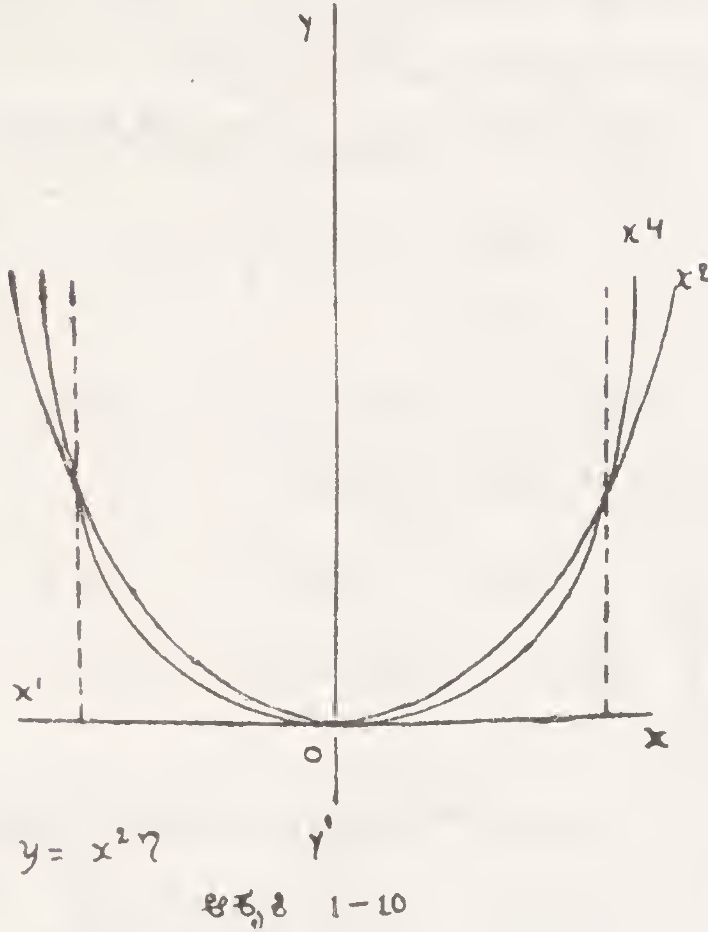
ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು



$y = x^{2n-1}$

ಆಕೃತಿ 1-9

ಹೆಸರು. ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದುದು. ಇದರ ನಕ್ಷೆಯು, n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಆಕೃತಿ 1 – 9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುವಂತೆಯೂ, n ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಆಕೃತಿ 1 – 10 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆಯೂ, ಇರುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 1–10

ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಿಂದ ರಚಿತವಾದ

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ n ಘಾತದ **ಬಹುಪದಿ** (polynomial) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇಲ್ಲಿ a_0, a_1. a_2, ..., a_n ಎಂಬ ಸಹವರ್ತನಗಳು (coefficients) ಸ್ಥಿರಗಳು.

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$ ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ಬಹುಪದಿಯಾದರೆ, ಆಗ

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ **ಧಾರಣಾನುಸ್ಥಾಪನೆ** (rational function)

ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಧಾರಣಾನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನಾಗಿ (partial fractions) ಒಡೆಯಬೇಕಾದ ಪ್ರಮೇಯವು ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ಒದಗುವುದರಿಂದ, ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು § 1·57 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಿತಿಯು ನಮಗೆ ಮುಂದೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

m ಎಂಬ ಸೂಚಕದ (index) ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x-1} = m$$

ಸಾಧನೆ: ಪಕ್ಷ (i) [case (i)]: m ಎಂಬ ಸೂಚಕವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ: ಭಾಗಹಾರದಿಂದ

$$\frac{x^m - 1}{x-1} = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1.$$

ಇದರಲ್ಲಿ $x \to 1$ ಆದರೆ, ಬಲಭಾಗವು $1+1+..+1 = m$ ಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ.

ಪಕ್ಷ (ii): m ಸೂಚಕವು p/q ಎಂಬ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ (positive fraction): ಇಲ್ಲಿ p, q ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಮತ್ತು $q \neq 1$. $x^{1/q} = z$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, $x \to 1$ ಆದಾಗ $z \to 1$.

$$\therefore \frac{x^m - 1}{x-1} = \frac{z^p - 1}{z^q - 1} = \frac{(z^p - 1)/(z-1)}{(z^q - 1)/)z-1)}$$

$$\to \frac{p}{q} = m \text{ [ಪಕ್ಷ (i) ರಿಂದ].}$$

ಪಕ್ಷ (iii): m ಸೂಚಕವು $-n$ ಎಂಬ ಋಣಧಾರಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ (negative rational number):

$$\frac{x^m - 1}{x-1} = -\frac{1}{x^n} \quad \frac{x^n - 1}{x-1}$$

$$\to -n = m \text{[ಪಕ್ಷ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ]}$$

ಇಲ್ಲಿಗೆ m ಸೂಚಕವು ಧಾರಣಾಂಕವಾದಾಗ ಫಲವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯಿತು. m ಸೂಚಕವು ಅಧಾರಣಾಂಕವಾದಾಗಲೂ ಈ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಆ ಸಾಧನೆ ಇಲ್ಲಿ ಬೇಡ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : § 1.56 ನೋಡಿ.

ಉಪಲಬ್ಧ (corollary) :

$$\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{x^m - a^m}{x-a} = ma^{m-1}.$$

ಏಕೆಂದರೆ,

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} = \frac{a^m\left[\left(\frac{x}{a}\right)^m - 1\right]}{a\left[\left(\frac{x}{a}\right) - 1\right]}$$

$$= a^{m-1}\frac{z^m - 1}{z-1}, \quad \left(z = \frac{x}{a}\right)$$

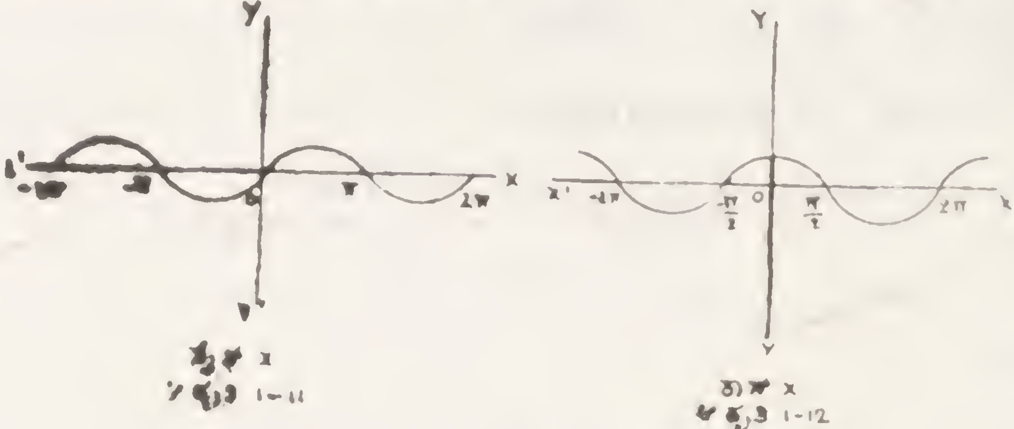
$x \to a$ ಆದಾಗ, $z \to 1$. $\therefore (z^m - 1)/(z-1) \to m$.

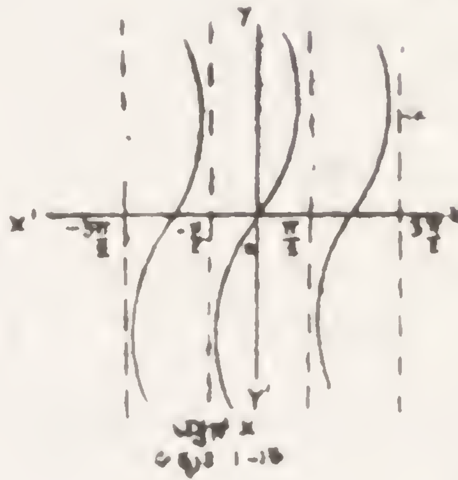
1.52. ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (trigonometric elementary functions).

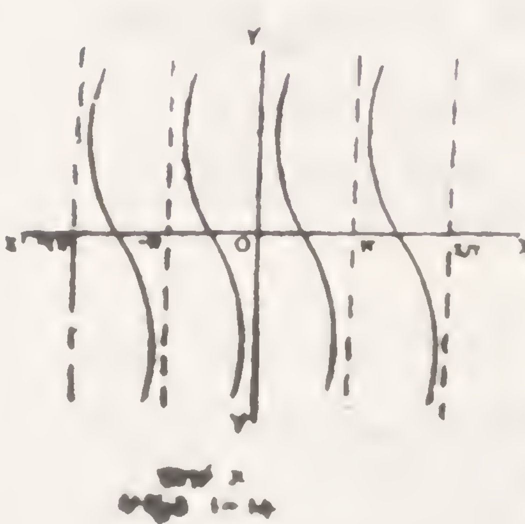
ಸೈನ್ x, ಕಾಸ್ x, ಟ್ಯಾನ್ x, ಕಾಟ್ x, ಸೆಕ್ x, ಕೋಸೆಕ್ x ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮಗಳಾದ

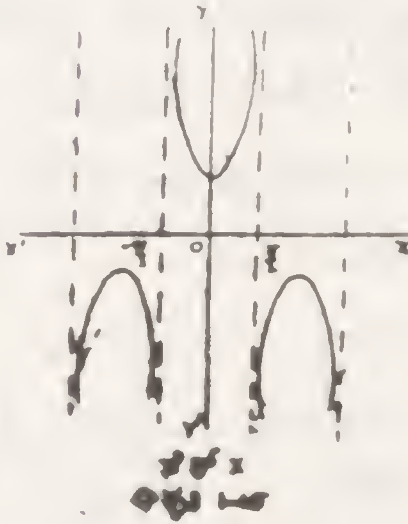
ಸೈನ್^{-1}x, ಕಾಸ್^{-1}x, ಟ್ಯಾನ್^{-1}x, ಕಾಟ್^{-1}x, ಸೆಕ್^{-1}x, ಕೋಸೆಕ್^{-1}x ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಆರು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು 1 – 11 ರಿಂದ 1 – 16 ರ ವರೆಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

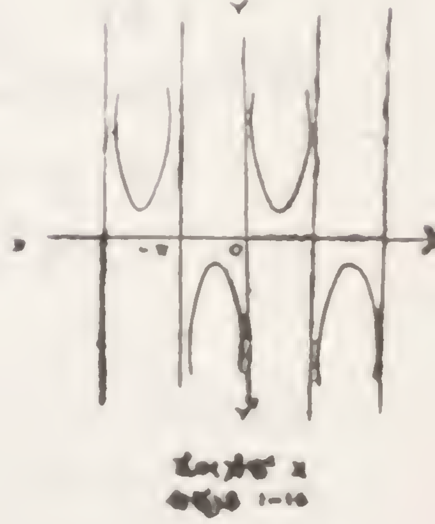
ಈ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ $x-$ ಮತ್ತು $y-$ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯಮಾಡಿ (interchange) ಆಯಾ ವಿಲೋಮ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y=$ ಸೈನ್ ^{-1}x ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 1 – 17 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.







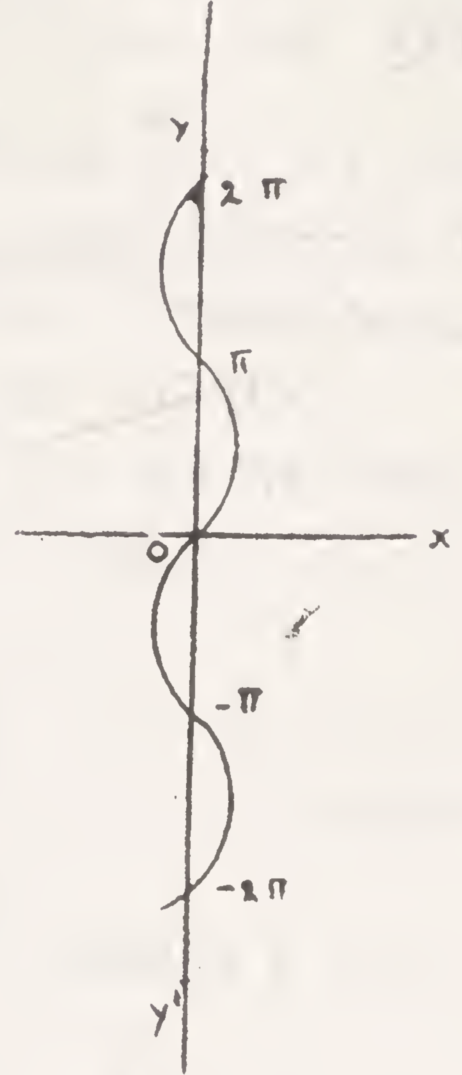




$$\text{ಸೈನ್ } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\text{ಕಾಸ್ } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ ಸೈನ್ ಮತ್ತು ಕೋಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಕೋನವು ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಮಾನದಲ್ಲಿದೆ (radian measure). ಈ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಅಭ್ಯಗ್ರಿಸುವ (ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗುವ, converge) ಪರಿಮಿತಿಗಳೇ ಸೈನ್ x ಮತ್ತು ಕಾಸ್ x ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಕ ನಿರೂಪಣೆಗಳು (analytical definitions).



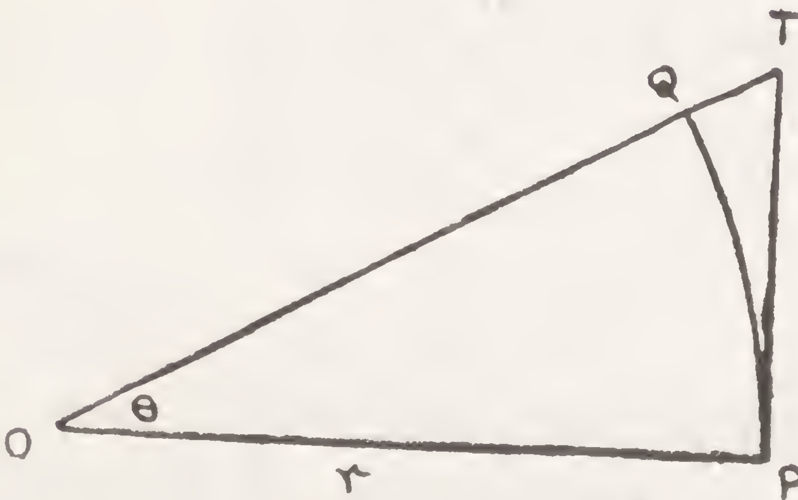
ಸೈನ್ ^{-1}x
ಆಕೃತಿ 1–17

ಈಗ,

$$\underset{\theta\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{\text{ಸೈನ್}\,\theta}{\theta}=1$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

(i) ರೇಖಾಸಾಧನೆ (geometrical proof):



ಆಕೃತಿ 1–18

ಕೇಂದ್ರ O, ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r, ಉಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ PQ ಎಂಬ ಒಂದು ಕಂಸವನ್ನು (arc), $\angle POQ=\theta$, $0<|\theta|<\frac{\pi}{2}$ ಇರುವಂತೆ, ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 1 – 18). P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು OQ ಕಿರಣವನ್ನು T ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ,

$$\triangle OPQ < \text{ಶಕಲ (sector) } OPQ < \triangle OPT.$$

ಎಂದರೆ, $\frac{1}{2}r^2$ ಸೈನ್ $\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r^2$ ಟ್ಯಾನ್ θ.

$$\therefore \quad \text{ಸೈನ್ } \theta < \theta < \text{ಟ್ಯಾನ್ } \theta.$$

$$\therefore \quad 1 < \frac{\theta}{\text{ಸೈನ್ } \theta} < \frac{1}{\text{ಕಾಸ್ } \theta}$$

ಅಥವಾ, $$1 > \frac{\text{ಸೈನ್ } \theta}{\theta} > \text{ಕಾಸ್ } \theta.$$

$$\therefore \quad 1 \geq \underset{\theta \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{\text{ಸೈನ್ } \theta}{\theta} \geq 1$$

$$\therefore \quad \underset{\theta \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{\text{ಸೈನ್ } \theta}{\theta} = 1.$$

(ii) ವಿಶ್ಲೇಷಕ ಸಾಧನೆ (analytical proof):

$$\text{ಸೈನ್ } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ಸೈನ್ } \theta}{\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} - \frac{\theta^6}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - \left(\frac{\theta^2}{3!} - \frac{\theta^4}{5!}\right) - \left(\frac{\theta^6}{7!} - \frac{\theta^8}{9!}\right) - \cdots$$

ಈಗ θ ಕೋನವು ಸಾಕಾದಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದರೆ [ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಸಿಗಿಂತ (radian) ಕಡಮೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಹಾಗೂ $\theta^2<3!$ ಆದರೆ– A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ (ii), § 6.34, ಪುಟ 130 ನೋಡಿ], ಇಲ್ಲಿ

ಆವರಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂತರಗಳೆಲ್ಲವೂ ಧನವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, θ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದಾಗ (ಸೈನ್ θ)/θ<1. ಅಲ್ಲದೆ,

$$\frac{\text{ಸೈನ್ } \theta}{\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{3!}\right) + \left(\frac{\mu^4}{5!} - \frac{\theta^6}{7!}\right) + \cdots$$

$$> 1 - \frac{\theta^2}{3!} \quad (\theta \text{ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದಾಗ}).$$

ಹೀಗೆ θ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದಾಗ

$$1 > \frac{\text{ಸೈನ್ } \theta}{\theta} > 1 - \frac{\theta^2}{6}$$

ಈಗ θ ಕೋನವು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಉಪಕಂಠಿಸಲಿ (tend to zero). ಇತ್ಯಾದಿ.

1.53. ಸೂಚಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ (exponential function).

e^x (e ನೇಪಿಯರನ ಸ್ಥಿರ)

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಸೂಚಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ಹೆಸರು. § 1.42 ರಿಂದ

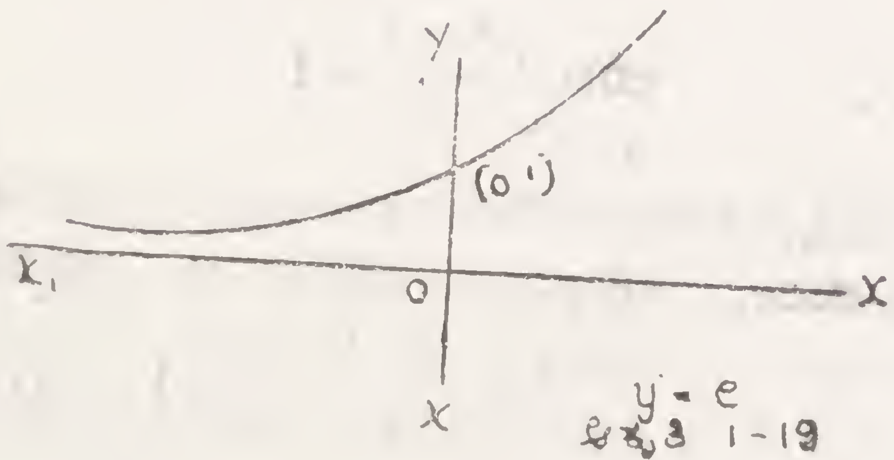
$$e^x = \underset{n \to \infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

ಎಂಬ ಸಮತೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದಲೂ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$y = e^x$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 1–19 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 1-19

ಈ ರೇಖೆಯು $-\infty < x < \infty$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ 0 ಯಿಂದ ∞ ವರೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿ ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ; $y-$ ಅಕ್ಷವನ್ನು (0, 1) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ $x-$ ಅಕ್ಷವು ಎಡ ಅಂತಿಮಕ್ಕೆ ಅಸಂಪಾತಿ ಯಾಗಿದೆ (asymptote).

ಈಗ, ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : ಮೊದಲು $0<x<1$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ, $e^x>1+x$; ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಹೋಲಿಕೆ ಯಿಂದ, $e^x<1+x+x^2+\cdots=1/(1-x)$. ಹೀಗೆ

$$\frac{1}{1-x} > e^x > 1+x, \qquad 0<x<1.$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{1-x}-1 > e^x-1>x \qquad ,,$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{1}{1-x} > \frac{e^x-1}{x} > 1 \qquad ,,$$

$$\therefore \qquad 1\geqslant \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \geqslant 1.$$

$$\therefore \qquad \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \ldots\ (i)$$

ಮತ್ತೆ, $x<0$ ಆದಾಗ, $x=-y$, $y>0$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳ ಬಹುದು. ಆಗ $x\to 0$ ಆದರೆ, $y\to 0$. ಆದ್ದರಿಂದ

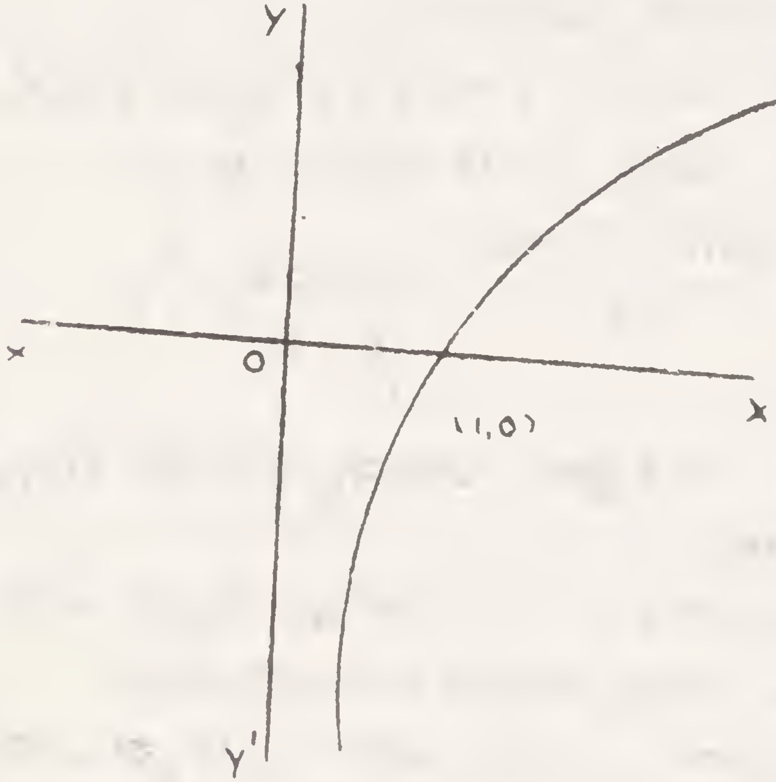
$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^y-1}{y}\cdot\frac{1}{e^y}\to 1, \quad [\text{(i) ರಿಂದ}]$$

1.54. ಲಘುಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ (logarithmic function).

$y = e^x$ ಎಂಬ ಸೂಚಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ವಿಲೋಮ (inverse) ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಲಘುಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ಹೆಸರು. ಇದಕ್ಕೆ

ಲಾಗ್$_e$ x

ಅಥವಾ ಲಘು$_e$ x ಎಂದು ಸಂಕೇತ. e^x ಮತ್ತು ಲಾಗ್$_e$ x ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಆಕೃತಿ 1–19 ರಲ್ಲಿ x – ಮತ್ತು



y = ಲಾಗ್$_e$ x

ಆಕೃತಿ 1–20

y – ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದರೆ $y =$ ಲಾಗ್$_e$ x ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 1 – 20 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. $0 < x < \infty$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಈ ರೇಖೆಯು $-\infty$ ಯಿಂದ $+\infty$ ಯವರೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿ ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ; x – ಅಕ್ಷವನ್ನು

(1, 0) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. y - ಅಕ್ಷವು ಈ ರೇಖೆಗೆ ಕೆಳಗಡೆ ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗಿದೆ.

$$\text{ಲಾಗ್}_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, (-1 < x \leq 1)$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಲಘುಮಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೆಸರು. [A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ § 6.33, ಪುಟ 123 ನೋಡಿ.]

ಈಗ ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ

$$\underset{x \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{\text{ಲಾಗ್}_e (1+x)}{x} = 1$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ: ಲಾಗ್$_e (1+x) = y$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ $1 + x = e^y$; ಮತ್ತು $x \to 0$ ಆದಾಗ, $y \to 0$.

$$\therefore \text{ಪರಿಮಿತಿ} \frac{\text{ಲಾಗ್}_e (1+x)}{x} = \underset{y \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{y}{e^y - 1}$$

$$= 1 \qquad [\S\ 1.53]$$

1.55. ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (hyperbolic functions).

ಸೈನ್ ಎಚ್ x, ಕಾಸ್ ಎಚ್ x, ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್ x, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಆರು, ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ವಿಲೋಮಗಳಾದ

ಸೈನ್ ಎಚ್^{-1}x, ಕಾಸ್ ಎಚ್^{-1}x, ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್^{-1}x, ... ಇತ್ಯಾದಿ ಆರು— ಈ ಹನ್ನೆರಡು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳೆಂದು ಹೆಸರು. ಇಲ್ಲಿ ಸೈನ್ ಎಚ್ x ಮತ್ತು ಕಾಸ್ ಎಚ್ x ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು

ಸೈನ್ ಎಚ್ $x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$, ಕಾಸ್ ಎಚ್ $x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಇವುಗಳಿಂದ

ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್ x = (ಸೈನ್ ಎಚ್ x)/(ಕಾಸ್ಎಚ್ x)

ಇತ್ಯಾದಿ ನಿರೂಪಣೆಗಳನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು e^x ಎಂಬ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಿಂದ ರಚಿತ

ವಾಗಿದ್ದರೂ ಇವೂ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳೆಂದೇ ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡತಕ್ಕವು. ಅತಿಕ್ಷೇಪ (hyperbola) ಎಂಬ ಶಂಕು ಭಾಗಿನಿಯ (conic) ಪರಮಾನ ರೂಪಣೆಗೆ (parametric representation) ಕಾಸ್‌ಎಚ್ x, ಸೈನ್‌ಎಚ್ x ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಹೊಂದುವುದರಿಂದ, ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳೆಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ.

ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಗಳಿಂದ ನೇರವಾಗಿ

$$\text{ಕಾಸ್‌ಎಚ್}^2 x - \text{ಸೈನ್‌ಎಚ್}^2 x = 1$$

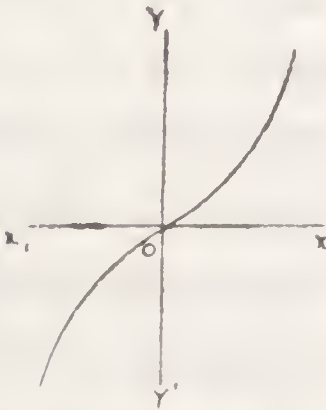
ಎಂಬ ನಿತ್ಯ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ e^x ನ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ

$$\text{ಸೈನ್‌ಎಚ್ } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

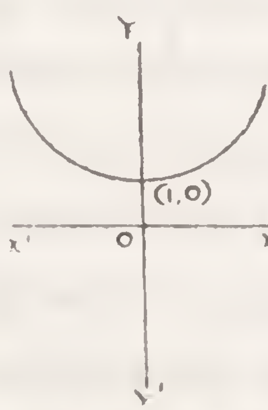
$$\text{ಕಾಸ್‌ಎಚ್ } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

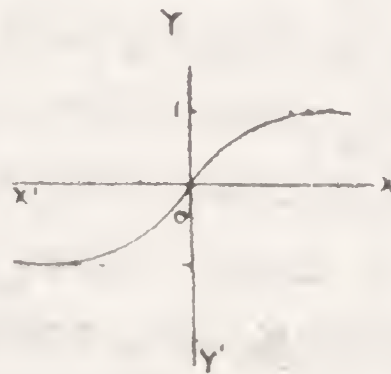
ಸೈನ್‌ಎಚ್ x, ಕಾಸ್‌ಎಚ್ x ಮುಂತಾದ ಆರು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು 1 – 21 ರಿಂದ 1 – 26 ರವರೆಗಿನ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



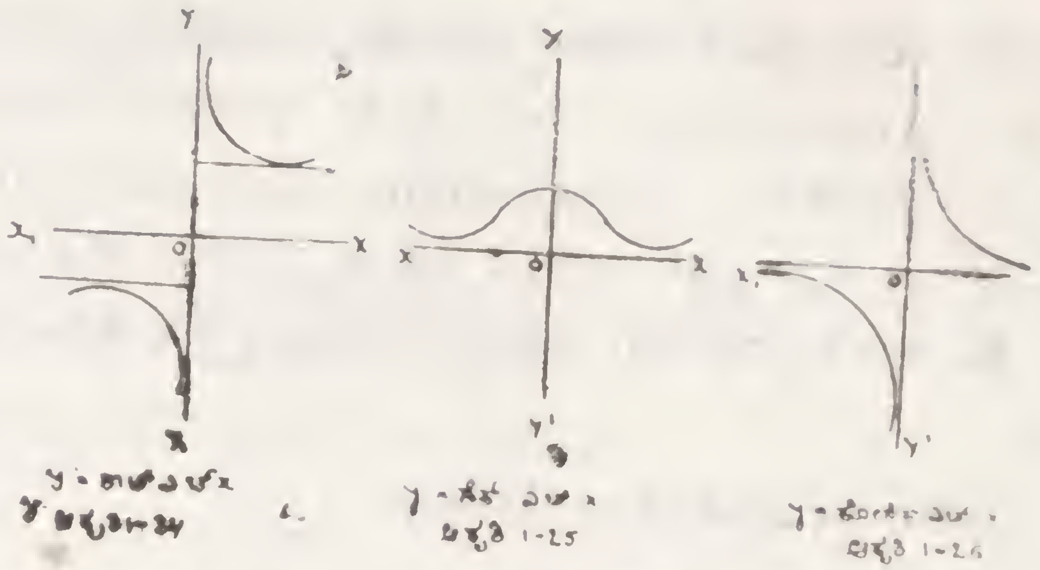
y = ಸೈನ್ ಎಚ್ x
ಆಕೃತಿ 1-21.



y = ಕಾಸ್ ಎಚ್ x
ಆಕೃತಿ 1-22



y = ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್ x
ಆಕೃತಿ 1-23.



ಈ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ x– ಮತ್ತು y– ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯ ಮಾಡಿದರೆ, ಆಯಾ ವಿಲೋಮ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

1.56. ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಗಳ ವಿಚಾರ (on indeterminate forms).

ಪರಿಚ್ಛೇದ 1 – 51 ರಲ್ಲಿ $x \to 1$ ಆದಾಗ $(x^m - 1)/(x - 1) \to m$ ಎಂದು ತೋರಿಸಲಾಯಿತಷ್ಟೆ. ಇಲ್ಲಿ ಗಮನೀಯವಾದ ಒಂದು ವಿಷಯವಿದೆ. $(x^m - 1)/(x - 1)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಲ್ಲಿ xಗೆ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ, ಆಗ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಬೆಲೆಯು m ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $x = 1$ ಹಾಕಿದರೆ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ m ಎಂಬ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ; ಆ ಬದಲು % ಎಂಬ ರೂಪವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $x = 1$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಬೆಲೆಯು ದತ್ತವಾಗಿಲ್ಲ. ಅದು ದತ್ತವಾಗಿರಲಿ ಆಗದಿರಲಿ, ಪರಿಮಿತಿಯು m ಆಗುತ್ತದೆ. mಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೂ $x = 1$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ರೂಪವು % ಆಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ % ಎಂಬ ರೂಪವು ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ ಪರಿಮಿತಿಯ ಬೆಲೆಯು ಆಯಾ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ % ಎಂಬ ರೂಪವು ಅನಿರ್ದೇಶೀಯವಾದುದು. § 1·5 ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಇತರ ಪರಿಮಿತಿಗಳೂ % ಎಂಬ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದುವೇ.

ವಸ್ತುತಃ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ ಎಂಬ ರೂಪಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯವಾದುವೇ. ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಪರಿವರ್ತನೆಯ ಅಥವಾ ಲಘುಮಿತಿಯ ಮೂಲಕ % ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಬಹುದು. ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು § 4·23 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

1.57. ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು (partial fractions).

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ಧಾರಣಾನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳಾಗಿರುವ ಬಹುಪದಿಗಳನ್ನು $P(x)$ ಮತ್ತು $Q(x)$ ಎಂದು ಕರೆದು,

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

ಎಂದು ಹ್ರಸ್ವವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ. ಈಗ $n<m$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು. ಈ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆಗೆ (generality) ಯಾವ ಚ್ಯುತಿಯೂ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $n\geq m$ ಆದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ $P(x)$ ನ್ನು $Q(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $R(x)$ ನ್ನು

$$R(x)=S(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬಹುದು. ಆಗ $P_1(x)$ ನ ಘಾತವು $Q(x)$ ನ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ.

ಈಗ $Q(x)$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಗಳಿರಬಹುದು :

(i) ಅನಾವರ್ತ ಸರಳಾಪವರ್ತನಗಳು (non-repeating linear factors) ಎಂದರೆ, $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, ಇತ್ಯಾದಿ.

(ii) ಆವರ್ತ ಸರಳಾಪವರ್ತನಗಳು (repeating linear factors) ಎಂದರೆ, $(x-\beta_1)^r$, $(x-\beta_2)^s$, ಇತ್ಯಾದಿ.

(iii) ಅನಾವರ್ತ ಅನಪವರ್ತೀಯ ವರ್ಗಾಪವರ್ತನಗಳು (non-repeating irresoluble quadratsc factors) ಎಂದರೆ, $a_1x^2+b_1x+c_1$ $(b_1^2<4a_1c_1)$, $a_2x^2+b_2x+c_2$, $(b_2^2<4a_2c_2)$, ಇತ್ಯಾದಿ.

(iv) ಆವರ್ತ ಅನಪವರ್ತೀಯ ವರ್ಗಾಪವರ್ತನಗಳು (repeating irresoluble quadratic factors) ಎಂದರೆ, $(l_1x^2+m_1x+n_1)^r$ $(m_1^2<4l_1n_1)$, $(l_2x^2+m_2x+n_2)^s$ $(m_2^2<4l_2n_2)$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ನಾಲ್ಕು ವಿಧಗಳ ಪೈಕಿ ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧದ $(x-a)$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನಕ್ಕೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ

$$\frac{A}{x-a}$$

ಸಂಗತ (where) A ಎಂಬುದೊಂದು ಸ್ಥಿರ, ಎಂಬ ರೂಪದ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೊಂದನ್ನು ಬರೆದು ಅದನ್ನು $R(x)$ನ ಒಂದು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೆಂದು ಕರೆಯೋಣ.

ಎರಡನೆಯ ವಿಧದ $(x-\beta)^r$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆವರ್ತ ಸರಳಾಪವರ್ತನಕ್ಕೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ

$$\frac{B_1}{x-\beta}, \frac{B_2}{(x-\beta)^2}, \dots, \frac{B_r}{(x-\beta)^r}$$

ಸಂಗತ $B_1, B_2, \dots B_r$ ಸ್ಥಿರಗಳು, ಎಂಬ ರೂಪದ r ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ಮೂರನೆಯ ವಿಧದ ax^2+bx+c, $b^2<4ac$, ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನಕ್ಕೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ

$$\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}.$$

ಸಂಗತ C, D ಸ್ಥಿರಗಳು, ಎಂಬ ರೂಪದ ಒಂದು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ವಿಧದ $(lx^2+mx+n)^r$, $m^2<4ln$ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆವರ್ತ ವರ್ಗಾಪವರ್ತನಕ್ಕೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ

$$\frac{E_1x+F_1}{lx^2+mx+n},\ \frac{E_2x+F_2}{(lx^2+mx+n)^2},\ \ldots,\ \frac{E_rx+F_r}{(lx^2+mx+n)^r}$$

ಸಂಗತ $E_1, E_2, \ldots E_r, F_1, F_2, \ldots F_r$ ಸ್ಥಿರಿಗಳು, ಎಂಬ ರೂಪದ r ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

ಈಗ ಈ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಸಂಕಲಿಸೋಣ. ಅವುಗಳ ಛೇದಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. $Q(x)$ ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು $U(x)/Q(x)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುಬಹುದು. ಈಗ $U(x)\equiv P(x)$ ಆಗುವಂತೆ A, B, C, ... ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಿರಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ, $U(x)$ ಮತ್ತು $P(x)$ಗಳ ಸದೃಶ ಪದಗಳನ್ನು (similar terms) ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಬರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುವ ಸ್ಥಿರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ, A, B, C, ... ಮುಂತಾದ ಸ್ಥಿರಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಆಗ ಎಲ್ಲ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಮೊತ್ತವು $R(x)$ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲಿಗೆ $R(x)$ನ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತಾಯಿತು.

ಈಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $\dfrac{2x-5}{(x-1)(x-2)}$ನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ

$$\frac{2x-5}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$$\frac{2x-5}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡುಕಡೆಯೂ ಛೇದಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಶಗಳೂ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಎಂದರೆ,

$$2x - 5 \equiv (A + B)x - (2A + B).$$

ಈಗ ಎರಡುಕಡೆಯೂ ಸದೃಶ ಪದಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ,

$$A + B = 2, \text{ ಮತ್ತು } 2A + B = 5$$

ಎಂಬ ಸಮಕಾಲಿಕ (simultaneous) ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿಘಟಿಸಿದರೆ (ಬಿಡಿಸು, solve), $A = 3$ ಮತ್ತು $B = -1$ ಆಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{2x - 5}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x - 2} \qquad \text{ಉತ್ತರ.}$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : $2x - 5 \equiv A(x - 2) + B(x - 1) \quad .... \quad (i)$ ಎಂಬ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ (identity) x ಗೆ ಯಾವುವಾದರೂ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು A, B ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. x ಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ A, B ಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೆಲೆಗಳೆಂದರೆ ದತ್ತ ಛೇದದ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಶೂನ್ಯವಾಗುವ ಬೆಲೆಗಳೆಂಬುದು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ. ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ ಅವು $x = 1$ ಮತ್ತು $x = 2$. ಸಮೀಕರಣ (i) ರಲ್ಲಿ $x = 1$ ಹಾಕಿದರೆ $A = 3$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ; ಮತ್ತು $x = 2$ ಹಾಕಿದರೆ $B = -1$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದದಿಂದ $(x - 1)$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ಉಳಿದ ವ್ಯಕ್ತಕದಲ್ಲಿ (expression) $x = 1$ ಹಾಕಿದರೆ A ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ; ಆ ಬದಲು $(x - 2)$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ಉಳಿದ ವ್ಯಕ್ತಕದಲ್ಲಿ $x = 2$ ಹಾಕಿದರೆ B ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಅನಾವರ್ತ ಸರಳಾಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

2. $$\frac{x^2 - 2x + 3}{(x + 1)(x - 2)(x + 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 4}$$

ಆದರೆ, A, B, C ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಟಿಪ್ಪಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸೋಣ. A ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ $x+1$ ಎಂಬ ಛೇದವು $x=-1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗೆ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದದ $x+1$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಬಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಉಳಿದ ಕಡೆ $x=-1$ ಹಾಕಿದರೆ, $A=-2/3$ ಎಂಬ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $B=1/6$, ಮತ್ತು $C=3/2$. ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದಲೂ A, B, C ಗಳಿಗೆ ಇವೇ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

3. $\dfrac{1}{x^2-a^2}$ ನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$$

ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಮೇಲಿನಂತೆ $A=1/2a$, $B=-1/2a$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]$$

4. $\dfrac{x^3+1}{x(x+2)}$ ನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಆಗ

$$\frac{x^3+1}{x(x+2)}=x-2+\frac{4x+1}{x(x+2)}$$

ಈಗ ಹಿಂದಿನಂತೆ,

$$\frac{4x+1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

ಎಂದು ಬಂದರೆ, $A=1/2$ ಮತ್ತು $B=7/2$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{x^3+1}{x(x+2)}=x-2+\frac{1}{2x}+\frac{7}{2(x+2)}$$ ಉತ್ತರ.

5. $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x-3}$ ನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲೂ ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಆಗ ಮೇಲಿನಂತೆ

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x-3} = 1 + \frac{6}{(x-1)(x+3)}$$

$$= 1 + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{3}{2(x+3)}$$

6. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ ನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{(B+C)x^2 + (A-2C+B)x + (2A-2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\therefore\ (B+C)x^2 + (A-2C+B)x + (2A-2B+C) \equiv 1.$$

$$\therefore\ B+C=0;\quad A-2C+B+0;\quad 2A-2B+C=1.$$

$$\therefore\quad A=\tfrac{1}{3};\quad B=-\tfrac{1}{9};\quad C=\tfrac{1}{9}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{1}{9(x-1)} + \frac{1}{9(x+2)}$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಇಲ್ಲಿ C ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಮೇಲೆ 1 ನೆಯ ಲೆಕ್ಕದ ಟಿಪ್ಪಣಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಆದರೆ A, B ಗಳು ಆ ಸೂತ್ರದಿಂದ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, ಆ ಸೂತ್ರವು ಅನಾವರ್ತ ಸರಳಾಪವರ್ತನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

7. $\dfrac{x^3-1}{x(x^2+x+1)}$ ನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $\dfrac{x^3-1}{x(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ, x^2+x+1 ಎಂಬುದು ಛೇದದ ಅನಪವರ್ತೀಯ ವರ್ಗಾಪವರ್ತನ. ಉಳಿದ ಕ್ರಮ ಹಿಂದಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ.

$$\frac{x^3-1}{x(x^2+x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$ ಉತ್ತರ.

8. $$\frac{2x^6+6x^4-x^3+7x^2-x+2}{x(x^2+1)^3}$$

ಇದನ್ನು ಪಾರ್ಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}$$

ಎಂದು ಭಾವಿಸಬೇಕು. ಉಳಿದ ಕ್ರಮ ಈ ಮೇಲೆ 6 ನೆಯ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ. $\frac{2}{x}-\frac{1}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{(x^2+1)^3}$ ಉತ್ತರ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1

1. $f(x)=x-\sqrt{(1-x)}$ ಮತ್ತು $\phi(x)=$ ಕಾಸ್$^2 x$ ಆದರೆ, $f[\phi(x)]=$ ಸೈನ್ $2x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $f(x)=1/(1-x)$ ಆದರೆ, $fff(x)=x$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $f(x)=(1+x)^5$ ಆದರೆ,

$$\frac{f(\sqrt{2})+f(-\sqrt{2})}{f(\sqrt{2})-f(-\sqrt{2})}$$

ಇದರ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

4. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}$ ಆದರೆ, $y^2-y-x=0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $y = x^{x^{x^{\cdots}}}$ ಆದರೆ, ಲಾಗ್ $y = y$ ಲಾಗ್ x ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $u = \frac{x}{1+} \frac{y}{1+} \frac{x}{1+} \frac{y}{1+} \cdots$

ಮತ್ತು $v = \frac{y}{1+} \frac{x}{1+} \frac{y}{1+} \frac{x}{1+} \cdots$

ಆದರೆ, $u - v = x - y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $f(x) = \begin{vmatrix} 1+x, & 2, & 3, & 4 \\ 1, & 2+x, & 3, & 4 \\ 1, & 2, & 3+x, & 4 \\ 1, & 2, & 3, & 4+x \end{vmatrix}$

ಆದರೆ, $f(-10) = f(0) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ಆದರೆ, y ನ್ನು x ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. $x = 3at/(1+t^3)$ ಮತ್ತು $y = 3at^2/(1+t^3)$ ಆದರೆ, $x^3 + y^3 = 3axy$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಧಾರಣಾನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ :

(i) $\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$; (ii) $\frac{5x^2-2x+4}{(x-2)(x+1)(x+3)}$;

(iii) $\frac{x^2+1}{x(x+1)}$; (iv) $\frac{3x+1}{(x+1)^2(x-1)}$;

(v) $\frac{1}{x^3+1}$; (vi) $\frac{x-1}{x(x^2+1)^2}$.

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಿತಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $\underset{x\to 1}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}$; (ii) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{\text{ಟ್ಯಾನ್}\,x}{x}$;

(iii) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{\text{ಕಾಸ್}\,x}{x}$; (iv) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{\text{ಸೈನ್}\,3x}{x}$;

(v) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{\text{ಟ್ಯಾನ್}\,2x}{x}$; (vi) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\, x\,\text{ಕೋಸೆಕ್}\,\tfrac{1}{2}x$;

(vii) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\, x(1-\text{ಕಾಟ್}\,x)$; (viii) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

(ix) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{e^{x}-1}{\text{ಟ್ಯಾನ್}\,x}$; (x) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{\text{ಸೈನ್ಎಚ್}\,x}{x}$;

(xi) $\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{\text{ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್}\,x}{x}$;

(xii) $\underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\dfrac{1}{h}\text{ಲಾಗ್}_e\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$.

12. $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಸೈನ್ x ಮತ್ತು ಕಾಸ್ x ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳ ಸಂಧಿ ಬಿಂದುವಾವುದು ?

13. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ರೂಪಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸಿ :

(i) $-1\leqslant x\leqslant 1$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$-1\leqslant x<0$ ಆದಾಗ $f(x)=-x$,

$0\leqslant x<\frac{1}{2}$,, $f(x)=2x$,

$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$,, $f(x)=1$.

(ii) $0 \leq x \leq 2$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$0 \leq x < 1$ ಆದಾಗ $f(x) = x^2$,

$x = 1$,, $f(x) = \frac{1}{2}$,

$1 < x \leq 2$,, $f(x) = x - 1$.

(iii) $f(x) = [x]$, $x \geq 0$.

($[x]$ ಎಂದರೆ x ನಲ್ಲಿರುವ ಅತ್ಯಧಿಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ)

14. ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿ:

ಸೈನ್ ಎಚ್$^{-1}x =$ ಲಾಗ್ $[x + \sqrt{(x^2+1)}]$;

ಕಾಸ್ ಎಚ್$^{-1}x =$ ಲಾಗ್ $[x + \sqrt{(x^2-1)}]$;

ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್$^{-1}x = \frac{1}{2}$ ಲಾಗ್ $\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$;

ಕಾಟ್ ಎಚ್$^{-1}x = \frac{1}{2}$ ಲಾಗ್ $\frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$;

ಸೆಕ್ ಎಚ್$^{-1}x =$ ಲಾಗ್ $\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}$, $0 < x < 1$;

ಕೋಸೆಕ್ ಎಚ್$^{-1}x =$ ಲಾಗ್ $\frac{1+\sqrt{(1+x^2)}}{x}$, $x > 0$,

ಮತ್ತು ಲಾಗ್ $\frac{1-\sqrt{(1+x^2)}}{x}$, $x < 0$.

[$y =$ ಸೈನ್ ಎಚ್^{-1}x ಆದರೆ, $x =$ ಸೈನ್ ಎಚ್ $y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$.

$\therefore 2x = e^y - e^{-y}$; ಎಂದರೆ, $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$.

ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $e^y = x \pm \sqrt{(x^2+1)}$. ಆದ್ದರಿಂದ $y =$ ಲಾಗ್$_e[x \pm \sqrt{(x^2+1)}]$. ಇದು ನಿಜಾಂಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ (real number), ಕರಣಿಗೆ ($\surd$) ಧನಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಉಳಿದುವೂ ಹೀಗೆಯೇ.]

ಅಧ್ಯಾಯ II

ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನ

(differential coefficient)

2·1. ನಿರೂಪಣೆ ಮತ್ತು ಸಂಕೇತ (definition and notation).

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ಏಕಮೂಲ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ, x ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$\underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿ ಇರುವುದಾದರೆ, ಈ ಪರಿಮಿತಿಗೆ x ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ, x ಗೌರವದ, **ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನ** [differential coefficient of $f(x)$ at the point x, with respect to x] ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಇಲ್ಲಿ h ಎಂಬುದು ವಿಸ್ವಭಾವಿ; x ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಸ್ಥಿರಿ. h ಗೆ xನ ವರ್ಧನ (increment) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ವರ್ಧನವು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿರಬಹುದು ; ಅದು ಋಣವಾಗಿದ್ದಾಗಲೂ ಅದನ್ನು ವರ್ಧನವೆಂದೇ ಕರೆಯಲಾಗುವುದು. xನ ಬೆಲೆ x ನಿಂದ $x+h$ಗೆ ವರ್ಧಿಸಿದಾಗ yನ ಬೆಲೆ $f(x)$ನಿಂದ $f(x+h)$ಗೆ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ yನ ವರ್ಧನವು $f(x+h)-f(x)$ ಆಗುತ್ತದೆ. yನ ಈ ವರ್ಧನವನ್ನು k ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸಬಹುದು. h ಮತ್ತು k ಎಂಬ ವರ್ಧನಗಳಿಗೆ δx, δy ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳೂ ಇವೆ. ಎಂದರೆ, $h=\delta x$, $k=\delta y=f(x+h)-f(x)$ ಅಲ್ಲದೆ,

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad (h\neq 0)$$

ಎಂಬ ಧಾರಣರಾಶಿಗೆ ವರ್ಧಕ ಧಾರಣರಾಶಿ (incrementary ratio) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈಗ ಮೇಲಿನ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು

$$\underset{\delta x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{\delta y}{\delta x}$$

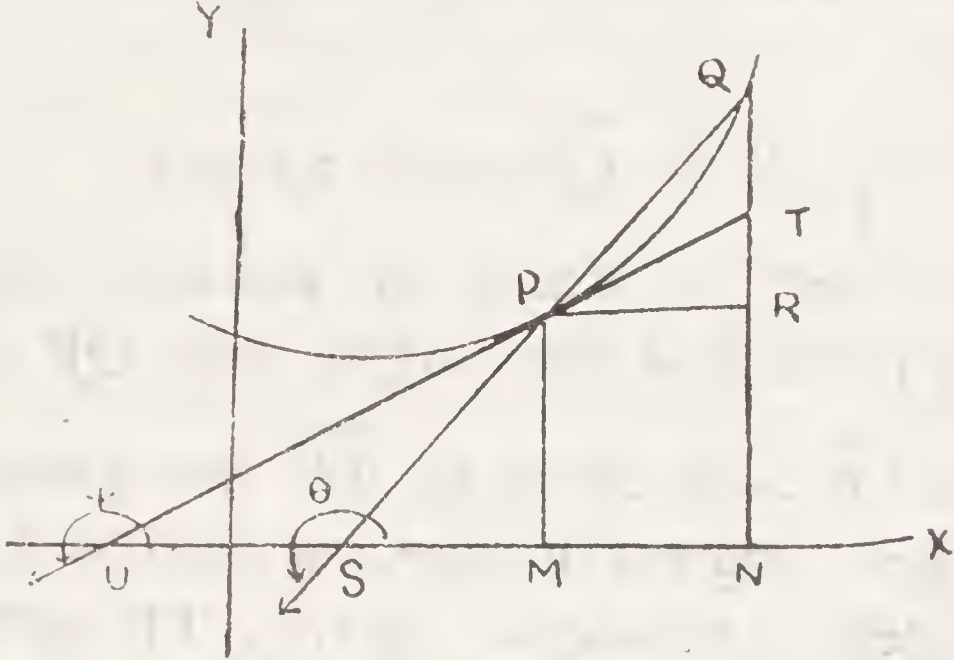
ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಷ್ಟೆ. ಈ ಪರಿಮಿತಿಗೆ, ಎಂದರೆ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನಕ್ಕೆ, dy/dx ಎಂಬುದು ಸಂಕೇತ. ಇದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಸಂಕೇತವೇ ಹೊರತು ಧಾರಣರಾಶಿಯಲ್ಲ (§ 2–5 ನೋಡಿ). ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನಕ್ಕೆ $f'(x)$, y', $Df(x)$ ಮುಂತಾದ ಸಂಕೇತಗಳೂ ಇವೆ. ಅಂತರಾಶ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ **ಅಂತರಣ** (ನಿಷ್ಪತ್ತಿ, differentiation, derivation) ಎಂದು ಹೆಸರು.

2.11. ರೇಖಾರ್ಥ ವಿವರಣೆ (geometrical interpretation).

ಈಗ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನದ ರೇಖಾರ್ಥವನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ. $y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತರೇಖೆಯುಮೇಲೆ $P(x, y)$ ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 2 – 1, 2 – 2). PM ಎಂಬ ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಆಗ $OM=x$, ಮತ್ತು $MP = y = f(x)$. ಈಗ OMಗೆ $MN=h$ ಎಂಬ ವರ್ಧನವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, $ON=x+h$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ವರ್ಧನವನ್ನು ಆಕೃತಿ 2 – 1 ರಲ್ಲಿ ಋಣವನ್ನಾಗಿಯೂ (negative), ಮತ್ತು ಆಕೃತಿ 2 – 2 ರಲ್ಲಿ ಧನವನ್ನಾಗಿಯೂ (positive) ತೋರಿಸಿದೆ. N ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತ $f(x)$ ರೇಖೆ

ಆಕೃತಿ 2-1

ಯನ್ನು Q ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ; ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯು NQ ಎಂಬ



ಆಕೃತಿ 2–2

ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು R ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ MNRP ಎಂಬ ಆಯುದಲ್ಲಿ (ದೀರ್ಘ ಚತುರಸ್ರ, rectangle), $PR = MN = h$, ಮತ್ತು $NR = MP = y = f(x)$. Q ಬಿಂದುವು $y = f(x)$ ರೇಖೆಯಮೇಲಿರುವುದರಿಂದಲೂ, $ON = x + h$ ಆದ್ದರಿಂದಲೂ, $NQ = f(x+h)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $RQ = NQ - NR = f(x+h) - f(x)$. ಈಗ PRQ ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{RQ}{PR} = \text{ಟ್ಯಾನ್ } \angle RPQ.$$

$\overrightarrow{QP}$ ಛೇದಕದ (secant) ದಿಶೆಯು (direction) $h<0$ ಆದಾಗ ಆಕೃತಿ 2–1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆಯೂ, $h>0$ ಆದಾಗ ಆಕೃತಿ 2–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ದಿಶೆಯು x–ಅಕ್ಷದ ಧನದಿಶೆಗೆ θ ಕೋನದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಆಕೃತಿ 2–1 ರಲ್ಲಿ $\theta = \angle RPQ$, ಮತ್ತು ಆಕೃತಿ 2–2 ರಲ್ಲಿ

$\theta = \angle RPQ + 180°$. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲೂ ಟ್ಯಾನ್ θ $=$ ಟ್ಯಾನ್ $\angle RPQ$. ಆದರೆ ಟ್ಯಾನ್ $\theta = \overrightarrow{QP}$ ಛೇದಕದ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತ (slope).

$$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \overrightarrow{QP} \text{ ಛೇದಕದ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತ.}$$

ಈಗ $h \to 0$ ಆದರೆ, N ಬಿಂದುವು M ಬಿಂದುವಿಗೂ, ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿಗೂ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತವೆ; ಅಲ್ಲದೆ QP ಛೇದಕವು ದತ್ತರೇಖೆಗೆ P ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ $\overrightarrow{TP}$ ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ. ವಸ್ತುಶಃ QP ಛೇದಕದ ಈ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನೇ ನಾವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೆಂದು ಕರೆಯುವುದು. (§ 7.1). TP ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶಿಯು Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವನ್ನು ಯಾವಕಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $h<0$ ಆದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶಿಯು ಆಕೃತಿ 2–1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆಯೂ, $h>0$ ಆದಾಗ ಆಕೃತಿ 2–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷದ ಧನದಿಶಿಗೆ ψ ಎಂಬ ಕೋನದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $h \to 0$ ಆದಂತೆ, $\theta \to \psi$

$$\therefore \underset{h \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \text{ಟ್ಯಾನ್ } \psi$$

$$= \text{TP ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತ.}$$

ಹೀಗೆ, $f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ x ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, $x-$ ಗೌರವದ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವು, $y=f(x)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ψ ಎಂಬ ಕೋನವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಕ್‌ಕೋನ. ಆದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಯಾವ ದಿಶಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; ಏಕೆಂದರೆ ಟ್ಯಾನ್ ψ $=$ ಟ್ಯಾನ್ $(\psi + 180°)$.

2.12. ಅಂತರಣೀಯತೆ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ (differentiability and continuity).

x ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಪ್ತವಾದ (finite) $f'(x)$ ಇರುವುದಾದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರಲೇ ಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ, $h \to 0$ ಆದಾಗ $f(x+h)-f(x) \to 0$ ಆಗಬೇಕು; ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $h \to 0$ ಆದಾಗ $[f(x+h)-f(x)]/h$ ಗೆ ಪರ್ಯಾಪ್ತವಾದ ಪರಿಮಿತಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ವಿಪರ್ಯಯವಾಗಿ (ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ, conversely), $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು x ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂಬ ಭರವಸೆಯೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಆಕೃತಿ 1 – 2 ರಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=\frac{1}{2}$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುದಾದರೂ, ಅಲ್ಲಿ $f^1(x)$ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $h>0$ ಆದರೆ,

$$\underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} = \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{h} = 0;$$

$$\text{ಮತ್ತು } \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(\frac{1}{2}-h)-f(\frac{1}{2})}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{\frac{1}{2}-h-\frac{1}{2}}{-h} = 1.$$

ಹೀಗೆ, $x=\frac{1}{2}$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆಯ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವು ಸೊನ್ನೆ ಮತ್ತು ಎಡಗಡೆಯ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವು 1. ಇವೆರಡೂ ಸಮವಾಗಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ $f(x)$ ಗೆ $x=\frac{1}{2}$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲಿ $f(x)$ ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಿಲ್ಲ.

2.13. ಜನ್ಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (derived functions).

ಒಂದು ದತ್ತ x – ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $f^1(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಆ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, $f^1(x)$ ನ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನುಸ್ಥಾಪನಾ ಸಂಬಂಧವಿದ್ದಂತಾಯಿತಷ್ಟೆ.

ಹೀಗೆ x– ಅನಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ನಿಂದ ಜನ್ಯವಾದ $f^1(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $f(x)$ನ **ಜನ್ಯ ಅಥವಾ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ** ಎಂದು ಹೆಸರು. $f^1(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅದರ ಜನಕವಾದ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಮೂಲ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

2.2. ಅಂತರಣ ವಿಧಾನ (the process of differentiation).

ದತ್ತ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ಕ್ಲಿಷ್ಟತೆ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಜನ್ಯವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ § 2.21 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಪ್ರಭವದಿಂದ (ab initio) ಎಂದರೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ (definition) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ವಸ್ತುತಃ § 1.5 ರಲ್ಲಿ ಉಕ್ತವಾಗಿರುವ ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣವು ಪ್ರಭವದಿಂದಲೇ ಆಗಬೇಕು. ಮಿಶ್ರ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಪ್ರಭವಾಂತರಣವು ಅಷ್ಟಾಗಿ ಅನುಕೂಲವಲ್ಲ. ಅವುಗಳ ಅಂತರಣಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಮಿಶ್ರಾನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ರಚನೆಯು ಕೆಲವು ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಸಂಕಲನಾದಿ ರೂಢ (ನಿರ್ಣಯ, standard) ಸಂಯೋಜಕ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಆಗಿರುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಿಶ್ರ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣ ವಿಧಾನಗಳು ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಮತ್ತು ರೂಢ ಸಂಯೋಜಕ ವಿಧಾನಗಳ ಅಂತರಣವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದ ನಾವು ಮೊದಲು ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಜನ್ಯಗಳನ್ನೂ ಮತ್ತು ಸಂಕಲನಾದಿ ರೂಢ ಸಂಯೋಜಕ ವಿಧಾನಗಳ ಅಂತರಣ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಗ ಮಿಶ್ರ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣ ವಿಧಾನಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತವೆ.

2.21. ಪ್ರಭವಾಂತರಣ (differentiation from first principles).

ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಪ್ರಭವಾಂತರಣವೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ವಿಧಾನವು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು ;

1. $f(x) = 3x^2 - 4$ ಆದರೆ, $x = 2$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಆದರ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 4.$$

$$f(2) = 3.2^2 - 4.$$

$$\therefore\ f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 12h.$$

$$\therefore\ \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3h + 12,\ h \neq 0.$$

$$\therefore\ \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 12$$ ಉತ್ತರ.

[(ii), ಉದಾ 3, § 2.31 ನೋಡಿ]

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x + 3$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಜನ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ತನ್ಮೂಲಕ $f'(1)$ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 2(x+h)^2 + 6(x+h) + 3.$$

$$\therefore\ f(x+h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4xh - 2h^2 + 6h.$$

$$\therefore\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 4x - 2h + 6,\ h \neq 0.$$

$$\therefore\ f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 - 4x + 6.$$

$$\therefore\ f'(1) = 5.$$

[(iii), ಉದಾ 3, § 2.31 ನೋಡಿ.]

3. $x = 3$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $y = x^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವೆಷ್ಟು ?

ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನದಿಂದ $f'(x) = 2x$.

$\therefore$ ವಾಂಛಿತ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತ $= f'(3) = 6$.

2.211. ರೂಢ ಜನ್ಯಗಳು (**standard derivatives).**

ಅಂತರಣದ ಸೌಲಭ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ರೂಢ (ಅಥವಾ ನಿರ್ಣಯ) ಜನ್ಯಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ, ಈ ಜನ್ಯಗಳು ಪದೇಪದೇ ಬೇಕಾಗುವುದರಿಂದ ಇವು ಕಂಠಸ್ಥವಾಗತಕ್ಕವು. ಇವುಗಳ ಸಾಧನೆ ಪ್ರಭವದಿಂದ. ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು § 2 – 3 ರಲ್ಲಿ ಆಯಾ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

1. $Dc = 0$, (c ಸ್ಥಿರ).
2. $Dx^n = nx^{n-1}$, (n ಸ್ಥಿರ).
3. D ಸೈನ್ x = ಕಾಸ್ x.
4. D ಕಾಸ್ x = – ಸೈನ್ x.
5. D ಟ್ಯಾನ್ x = ಸೆಕ್$^2 x$.
6. D ಕಾಟ್ x = – ಕೋಸೆಕ್$^2 x$.
7. D ಸೆಕ್ x = ಸೆಕ್ x ಟ್ಯಾನ್ x.
8. D ಕೋಸೆಕ್ x = – ಕೋಸೆಕ್ x ಕಾಟ್ x.
9. D ಸೈನ್$^{-1} x = 1/\sqrt{(1-x^2)}$.
10. D ಕಾಸ್$^{-1} x = -1/\sqrt{(1-x^2)}$.
11. D ಟ್ಯಾನ್$^{-1} x = 1/(1+x^2)$
12. D ಕಾಟ್$^{-1} x = -1/(1+x^2)$.
13. D ಸೆಕ್$^{-1} x = 1/[x\sqrt{(x^2-1)}]$.
14. D ಕೋಸೆಕ್$^{-1} x = -1/[x\sqrt{(x^2-1)}]$.
15. $D\, e^x = e^x$.
16. D ಲಾಗ್$_e x = 1/x$
17. D ಸೈನ್ಎಚ್ x = ಕಾಸ್ಎಚ್ x.
18. D ಕಾಸ್ಎಚ್ x = ಸೈನ್ಎಚ್ x.
19. D ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್ x = ಸೆಕ್ಎಚ್$^2 x$.
20. D ಕಾಟ್ಎಚ್ x = – ಕೋಸೆಕ್ಎಚ್$^2 x$.
21. D ಸೆಕ್ಎಚ್ x = – ಸೆಕ್ಎಚ್ x ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್ x.

22. D ಕೋಸೆಕ್ಎಚ್$x = -$ ಕೋಸೆಕ್ಎಚ್x ಕಾಟ್ಎಚ್x.
23. D ಸೈನ್ಎಚ್$^{-1}x = 1/\sqrt{(1+x^2)}$.
24. D ಕಾಸ್ಎಚ್$^{-1}x = 1/\sqrt{(x^2-1)}$.
25. D ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್$^{-1}x = 1/(1-x^2)$, $|x| < 1$.
26. D ಕಾಟ್ಎಚ್$^{-1}x = -1/(x^2-1)$, $|x| > 1$.
27. D ಸೆಕ್ಎಚ್$^{-1}x = -1/[x\sqrt{(1-x^2)}]$.
28. D ಕೋಸೆಕ್ಎಚ್$^{-1}x = -1/[x\sqrt{(1+x^2)}]$.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಲ್ಲಿ (3 ರಿಂದ 14ರ ವರೆಗೆ) ಕೋನಗಳು ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿ ಮಾನದಲ್ಲಿವೆ (radian measure) ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

2.22. ಸಂಕಲನಾದಿ ವಿಧಾನಗಳು ಮತ್ತು ಅಂತರಣ ಸೂತ್ರಗಳು (arithmetical processes and rules of differentiation).

ಈ ಕೆಳಗೆ u, v ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳು $u(x)$, $v(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತವೆ. δu, δv ಎಂಬ ವರ್ಧನಗಳು δx ಎಂಬ ವರ್ಧನಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದುವು (corresponding increments). $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\delta u \to 0$ ಮತ್ತು $\delta v \to 0$.

(1). $\mathbf{D(u+v) = Du + Dv.}$

ಸಾಧನೆ : $y = u + v$.

ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ : ಆಗ,

$$y + \delta y = u + \delta u + v + \delta v.$$
$$\delta y = \delta u + \delta v.$$
$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}, \quad \delta x \neq 0:$$

$\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ ಪರಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, (1), § 1.41 ರಿಂದಲೂ, ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನದ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದಲೂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ಎಂದರೆ, $\mathrm{D}(u+v) = \mathrm{D}u + \mathrm{D}v.$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಿಂದ

$\mathrm{D}(u+v+w) = \mathrm{D}u + \mathrm{D}v + \mathrm{D}w$; ಇತ್ಯಾದಿ.

(2) $\mathbf{D(-v) = -Dv.}$

ಸಾಧನೆ : $y = -v$ ಆದರೆ, ಮೇಲಿನಂತೆ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{\delta v}{\delta x}, \quad \delta x \neq 0.$$

ಈಗ $\delta x \to 0$ ಆದರೆ, (2), § 1.41 ರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$$

ಎಂದರೆ, $\mathrm{D}(-v) = -\mathrm{D}v.$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : $\mathrm{D}(u-v) = \mathrm{D}u + \mathrm{D}(-v) = \mathrm{D}u - \mathrm{D}v.$

(3) $\mathbf{D(uv) = uDv + vDu.}$

ಸಾಧನೆ : $y = uv$

ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$$y + \delta y = (u+\delta u)(v+\delta v)$$
$$= uv + u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v$$
$$\therefore \quad \delta y = u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v$$
$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta w}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta x}\delta v, \quad \delta x \neq 0.$$

ಈಗ $\delta x \to 0$ ಆದರೆ, (3), § 1·41 ರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ಎಂದರೆ, $\mathrm{D}(uv) = u\mathrm{D}v + v\mathrm{D}u.$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : (i) ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಿಂದ
$D(uvw) = vwDu + wuDv + uvDw$; ಇತ್ಯಾದಿ.

(ii) $\frac{D(uv)}{uv} = \frac{Du}{u} + \frac{Dv}{v}$,

$$\frac{D(uvw)}{uvw} = \frac{Du}{u} + \frac{Dv}{v} + \frac{Dw}{w}, \text{ ಇತ್ಯಾದಿ.}$$

(4) $$\mathbf{D\frac{u}{v} = \frac{vDu - uDv}{v^2} \cdot v \neq 0.}$$

ಸಾಧನೆ : $y = \frac{u}{v}$ ಆದರೆ, $y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$.

$$\therefore \quad \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v + \delta v)}.$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v + \delta v)}, \ \delta x \neq 0.$$

ಈಗ $\delta x \to 0$ ಆದರೆ, (4), § 1.41 ರಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

ಎಂದರೆ, $$D\frac{u}{v} = \frac{vDu - uDv}{v^2}.$$

(5) $$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{dw}{dx}}.$$

ಸಾಧನೆ : $y = f(u)$ ಮತ್ತು $u = \phi(x)$ ಆದರೆ, $y = f[\phi(x)]$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮೊದಲು $du/dx \neq 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ δx ಸಾಕಾದಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದರೆ, $\delta u \neq 0$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $\delta x \to 0$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ಎಂಬ ವಾಂಛಿತ ಸೂತ್ರವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೆ $du/dx = 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $\delta u = 0$ ಆಗುವ ಸಂಭವವಿರುವುದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣ (i) ಸಿದ್ಧವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈಗ $\delta u/\delta x \to 0$ ಆದ್ದರಿಂದ $\delta u = \epsilon \delta x$, $\epsilon \to 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $\delta u = 0$ ಆದಾಗ $\epsilon = 0$ ($\because \delta x \neq 0$). ಅಲ್ಲದೆ $dy/du = f'(u)$ ಆದ್ದರಿಂದ $\delta y/\delta u = f'(u) + \eta$, $\eta \to 0$, ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $\delta u = 0$ ಆದಾಗ $\delta y = f(u + \delta u) - f(u) = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ $\delta y = [f'(u) + \eta] \cdot \delta u$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $\therefore \delta y = [f'(u) + \eta] \cdot \epsilon \delta x$. $\therefore \delta y/\delta x = [f'(u) + \eta]\epsilon$, $\delta x \neq 0$. $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\epsilon \to 0$ ಮತ್ತು $\eta \to 0$. $\therefore dy/dx = 0$. ಮತ್ತೆ $dy/dw \neq \infty$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೂತ್ರ (5) ಈಗಲೂ ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ 2: $y = f(u)$, ಸಂಗತ $u = \phi(x)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಮೇಲಿನಂತೆ

$$\delta y = [f'(u) + \eta]\delta u, \quad \eta \to 0,$$

ಮತ್ತು $\delta u = [\phi'(x) + \eta']\delta x, \quad \eta' \to 0.$

$$\therefore \quad \delta y = [f'(u) + \eta][\phi'(x) + \eta'] \cdot \delta x.$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = [f'(u) + \eta][\phi'(x) + \eta'], \; \delta x \neq 0.$$

$$\because \text{ ಪರಿಮಿತಿ}_{\delta x \to 0} \frac{y\delta}{\delta x} = f'(u)\phi'(x),$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : (i). ಈ ಸೂತ್ರದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಿಂದ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du_1} \cdot \frac{du_1}{du_2} \cdot \frac{du_2}{du_3} \cdots \frac{du_n}{dx}.$$

(ii). ಸೂತ್ರ (5) ರಲ್ಲಿ $y = x$ ಹಾಕಿದರೆ

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{du} = 1.$$

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಎರಡು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಅದರ ಜನ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೊದಲನೆಯ ನಾಲ್ಕು ಸೂತ್ರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರಯೋಗವಾಗುತ್ತವೆ. ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಇನ್ನೊಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿದ್ದಾಗ (function of a function) ಅದರ ಅಂತರಣಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರ (5) ಪ್ರಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ, ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $y = f[\phi(x)]$ ಆದರೆ, ಅದನ್ನು xಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅಂತರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮೊದಲು ಅದನ್ನು $y = f(u)$, $u = \phi(x)$ ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆಮೇಲೆ $y = f(u)$ ಮತ್ತು $u = \phi(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಅಂತರಿಸಿ dy/du ಮತ್ತು du/dx ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಕೊನೆಗೆ dy/du ಮತ್ತು du/dx ಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ dy/dx ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $y = f[\phi\{\psi(x)\}]$ ಆದಾಗಲೂ ಹೀಗೆಯೇ; ಅದನ್ನು $y = f(u)$, $u = \phi(v)$, $v = \psi(x)$ ಎಂದು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಂಡು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನೂ ಅಂತರಿಸಿ dy/du, du/dv, dv/dx ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಕೊನೆಗೆ ಈ ಮೂರನ್ನೂ ಗುಣಿಸಿದರೆ dy/dx ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಘಟಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಮಿಶ್ರ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಐದು ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅಂತರಿಸಬಹುದು. ಇದೇ ಅಂತರಣದ ವಿಧಾನ. ಈಗ ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ವಿವಿಧ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಅಂತರಿಸೋಣ.

2.3. ವಿವಿಧ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of various types of functions).

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಮ್ಮ ಬಳಕೆಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು § 1,5 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಂಡು, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳ ಅಂತರಣವನ್ನು ಈಗ ವಿವರಿಸಲಾಗುವುದು.

2.31. ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of algebraic functions).

ರೂಢಜನ್ಯಗಳು :

(1). $\mathbf{Dc = 0}$, (c ಸ್ಥಿರಿ).

ಸಾಧನೆ : $f(x) = c$ ಆದರೆ, ಎಲ್ಲ h ಗಳಿಗೂ $f(x+h) = c$.

$$\therefore \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0, \quad h \neq 0.$$

$$\therefore \quad f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

(2). $\mathbf{Dx^n = nx^{n-1}}$, (n ಸ್ಥಿರಿ).

ಸಾಧನೆ : $f(x) = x^n$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}$$

$$= nx^{n-1} \qquad (\S\ 1.51).$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. i). $Dx^3 = 3x^2$; ii). $Dx^6 = 6x^5$; iii). $Dx = 1$;

iv). $D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 1/(2\sqrt{x})$;

v). $D\left(\frac{1}{x}\right) = Dx^{-1} = -x^{-2} = -1/x^2$;

vi). $D\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = Dx^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

2. i) $D(x^2 + x + 1) = Dx^2 + Dx + D1 = 2x + 1 + 0$
$= 2x + 1$;

ii) $D\left(x - \frac{1}{x}\right) = Dx - Dx^{-1} = 1 + x^{-2}$;

iii) $D\left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = Dx - Dx^{\frac{1}{2}} + Dx^{-\frac{1}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
[(1), (2), § 2·22]

3. i) $D(cu) = cDu + uDc = cDu + 0 = cDu$;
[(3), §2·22]

ii) $D(3x^2 - 4) = 3Dx^2 - D4 = 3\cdot(2x) - 0 = 6x$,
[ಉದಾ : 1, § 2·21 ನೋಡಿ] ;

iii) $D(x^3 - 2x^2 + 6x + 3)$
$= Dx^3 - 2Dx^2 + 6Dx + D3 = 3x^2 - 4x + 6$,
[ಉದಾ : 2, §2·21 ನೋಡಿ]

4. $D(2x+3)(3x-5)(x^2+1)$

$$= (3x-5)(x^2+1)D(2x+3)$$
$$+ (x^2+1)(2x+3)D(3x-5)$$
$$+ (2x+3)(3x-5)D(x^2+1)$$
$$= (3x-5)(x^2+1)2 + (x^2+1)(2x+3)3$$
$$+ (2x+3)(3x-5)2x$$

[(3), § 2·22]

5. $$D\frac{3x-2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)D(3x-2) - (3x-2)D(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

[(4), § 2·22]

$$= \frac{(x^2+1)3 - (3x-2)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+4x+3}{(x^2+1)^2}$$

6. $y = \sqrt{(5x^2-3x+4)}$ ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. ಅದನ್ನು $y = v^{\frac{1}{2}}$, $u = 5x^2 - 3x + 4$ ಎಂದು ಒಡೆಯಬಹುದು ಈಗ $dy/du = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$, ಮತ್ತು $du/dx = 10x - 3$.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot (10x-3) = \frac{10x-3}{2\sqrt{(5x^2-3x+4)}}$$

[(5), § 2·22]

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (a)

1. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಪ್ರಭವದಿಂದ ಅಂತರಿಸಿ :

(i) $4x^2 - 3x + 5$; (ii) $\frac{1}{x}$; (iii) $\frac{1}{x+2}$.

2. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ x – ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $2x^3 - 4x^2 + 3x + 7$; ii) $x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$;

iii) $(3x^2+1)(5x^3-1)$; iv) $(1+x)\sqrt{x}$;

v) $(2x^2-3)(x^2+1)(x+5)$; vi) $(2x-1)/(x^2+1)$;

vii) $(3x-2)/(x^2+x+1)$;

viii) $(4x-1)/\sqrt{(x^2-x+1)}$;

ix) $(x^2+3x+1)^5$; x) $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$;

xi) $1/\sqrt{(x^2+1)}$; xii) $\sqrt{[x/(x+2)]}$.

3. $y = x(x^2+1)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವೆಷ್ಟು ;

4. $y = x^2 - 5x + 6$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ, ಅದು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ, ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2·32. ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಲೋಮಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of trigonometric and inverse trigonometric functions).

ರೂಢಜನ್ಯಗಳು :

(1) **D ಸೈನ್ x = ಕಾಸ್ x.**

ಸಾಧನೆ : $f(x) =$ ಸೈನ್ x ಆದರೆ, ಆಗ

$$f(x+h) - f(x) = \text{ಸೈನ್}(x+h) - \text{ಸೈನ್}\,x$$

$$= 2\ \text{ಕಾಸ್}\left(x + \frac{h}{2}\right) \text{ಸೈನ್}\,\frac{h}{2}.$$

$$\therefore\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{ಕಾಸ್}\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{ಸೈನ್}\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},\ h \neq 0.$$

ಈಗ $h \to 0$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = \text{ಕಾಸ್}\,x. \qquad [\S\ 1\cdot 52]$$

(2) D ಕಾಸ್ x = − ಸೈನ್ x.

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನಂತೆ

(3) D ಟ್ಯಾನ್ x = ಸೆಕ್² x.

ಸಾಧನೆ : $f(x) =$ ಟ್ಯಾನ್ x ಆದರೆ, ಆಗ

$$(x+h) - f(x) = \frac{\text{ಸೈನ್}(x+h)}{\text{ಕಾಸ್}(x+x)} - \frac{\text{ಸೈನ್}\,x}{\text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$= \frac{\text{ಸೈನ್}(x+h)\,\text{ಕಾಸ್}\,x - \text{ಕಾಸ್}(x+h)\,\text{ಸೈನ್}\,x}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)\,\text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$= \frac{\text{ಸೈನ್}(x+h-x)}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)\ \text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$= \frac{\text{ಸೈನ್}\,h}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)\ \text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$\therefore\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)\ \text{ಕಾಸ್}\,x} \cdot \frac{\text{ಸೈನ್}\,h}{h},\ h \neq 0$$

ಈಗ $h \to 0$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = \text{ಸೆಕ್}^2 x, \qquad [\S\ 1\cdot 52]$$

(4) **D ಕಾಟ್ x = − ಕೋಸೆಕ್^{2}x.**

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನಂತೆ.

(5) **D ಸೆಕ್ x = ಸೆಕ್ x ಟ್ಯಾನ್ x.**

ಸಾಧನೆ ; $f(x) =$ ಸೆಕ್ x ಆದರೆ, ಆಗ

$$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)} - \frac{1}{\text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$= \frac{\text{ಕಾಸ್}\,x - \text{ಕಾಸ್}(x+h)}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)\ \text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$= \frac{2\ \text{ಸೈನ್}\left(x+\frac{h}{2}\right)\text{ಸೈನ್}\frac{h}{2}}{\text{ಕಾಸ್}\ (x+h)\ \text{ಕಾಸ್}\,x}$$

$$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\text{ಸೈನ್}\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\text{ಕಾಸ್}(x+h)\ \text{ಕಾಸ್}\,x} \cdot \frac{\text{ಸೈನ್}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},\ h \neq 0.$$

ಈಗ $h \to 0$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = \frac{\text{ಸೈನ್}\,x}{\text{ಕಾಸ್}^{2}\,x} = \text{ಸೆಕ್}\,x\ \text{ಟ್ಯಾನ್}\,x, \qquad [\S\ 1\cdot52]$$

(6) **D ಕೋಸೆಕ್ x = − ಕೋಸೆಕ್ x ಕಾಟ್ x**

ಸಾಧನೆ : ಮೇಲಿನಂತೆ.

(7) **D ಸೈನ್$^{-1}$x = 1/√(1 − x^2).**

ಸಾಧನೆ : $y =$ ಸೈನ್^{-1}x ಆದರೆ, ಆಗ $x =$ ಸೈನ್ y.

$\therefore\ dx/dy =$ ಕಾಸ್ y.

$\therefore\ dy/dx = 1/\text{ಕಾಸ್}\,y = 1/\sqrt{(1-\text{ಸೈನ್}^2 y)} = 1/\sqrt{(1-x^2)}$.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಈ ಜನ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾ. 3ನ್ನು ನೋಡಿ.

ಕಾಸ್^{-1}x ಮುಂತಾದ ಉಳಿದ ಐದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ವಿಲೋಮ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣವೂ ಇದೇ ರೀತಿ. ಅವುಗಳ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು § 2·211ರ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳೆಲ್ಲವೂ ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಮಾನದಲ್ಲಿವೆಯೆಂಬ ಅಂಶವು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾ. 1ನ್ನು ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y =$ ಸೈನ್ x° ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. $180^{\circ} = \pi$ ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಗಳಾದ್ದರಿಂದ, $x^{\circ} = \pi x/180$.

$\therefore\ y =$ ಸೈನ್$(\pi x/180)$. ಇದೊಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾದ್ದರಿಂದ, ಇದನ್ನು $y =$ ಸೈನ್ u, $u = \pi x/180$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಈಗ $dy/du =$ ಕಾಸ್ u, ಮತ್ತು $du/dx = \pi/180$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{180} \text{ ಕಾಸ್ } \frac{\pi x}{180} = \frac{\pi}{180} \text{ ಕಾಸ್ } x.$$

2. ಸೈನ್ $3x$ ನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಅಂತರಿಸಿ.

$f(x) =$ ಸೈನ್ $3x$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$f(x+h) - f(x) = \text{ಸೈನ್ } 3(x+h) - \text{ಸೈನ್ } 3x$$

$$= 2 \text{ ಕಾಸ್}\left(3x + \frac{h}{2}\right) \text{ ಸೈನ್ } \frac{3h}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{ಕಾಸ್}\left(3x + \frac{h}{2}\right) \frac{\text{ಸೈನ್ } \frac{3h}{2}}{\frac{3h}{2}} \cdot 3,\ h \neq 0.$$

ಈಗ $h \to 0$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = 3 \text{ ಕಾಸ್ } 3x.$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಈ ಜನ್ಯವನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದಲ್ಲದೆ, (5), § 2.22 ರಿಂದಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $y = \text{ಸೈನ್ } 3x$ನ್ನು $y = \text{ಸೈನ್ } u$, $u = 3x$ ಎಂದು ಒಡೆಯಬಹುದು. ಆಗ $dy/du = \text{ಕಾಸ್ } u$, ಮತ್ತು $du/dx = 3$. $\therefore dy/dx = 3 \text{ ಕಾಸ್ } 3x$.

3. $\text{ಸೈನ್}^{-1} x$ನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಅಂತರಿಸಿ.

$f(x) = \text{ಸೈನ್}^{-1} x$ ಆದರೆ, $f(x+h) = \text{ಸೈನ್}^{-1}(x+h)$. $\text{ಸೈನ್}^{-1} x = \theta$, ಮತ್ತು $\text{ಸೈನ್}^{-1}(x+h) = \phi$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $x = \text{ಸೈನ್ } \theta$, ಮತ್ತು $x + h = \text{ಸೈನ್ } \phi$. $\therefore h = \text{ಸೈನ್ } \phi - \text{ಸೈನ್ } \theta$.

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\phi - \theta}{\text{ಸೈನ್ } \phi - \text{ಸೈನ್ } \theta}$$

$$= \frac{1}{\text{ಕಾಸ್ } \frac{1}{2}(\phi + \theta)} \cdot \frac{\frac{1}{2}(\phi - \theta)}{\text{ಸೈನ್ } \frac{1}{2}(\phi + \theta)}.$$

ಈಗ, $h \to 0$ ಆದರೆ, $\phi \to \theta$.

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\text{ಕಾಸ್ } \theta} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{ಸೈನ್}^2 \theta)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

4. $$y = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} \frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{1 - \sqrt{(1-x^2)}}$$

ಆದರೆ, dy/dxನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} \sqrt{(1+x)} + \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} \sqrt{(1-x)}.$$

ಈಗ $z = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} \sqrt{(1+x)}$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, $z = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} u$, $u = v^{\frac{1}{2}}$, $1v = +x$.

$\therefore \; dz/du = 1/(1+u^2),\; du/dv = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}},\; dv/dx = 1.$

$\therefore \; dz/dx = 1/[2(2+x)\surd(1+x)]$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(2+x)\surd(1+x)} - \frac{1}{(2-x)\surd(1-x)}\right]$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (b)

1. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ x-ಜನ್ಯಗಳನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಸೆಕ್ $2x$; (ii) x ಸೈನ್x.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

i) ಸೈನ್x + ಸೈನ್^{-1}x ; ii) ಸೈನ್x ಕಾಸ್x ;

iii) (x^2+1)ಟ್ಯಾನ್^{-1}x ; iv) (ಟ್ಯಾನ್x)$/x$;

v) ಸೈನ್mx ; vi) ಕಾಸ್^2x ;

vii) ಟ್ಯಾನ್$\frac{1}{2}x$; viii) $\surd$(ಟ್ಯಾನ್x) ;

ix) ಟ್ಯಾನ್$\surd x$; x) ಸೆಕ್$^{-1}x^3$;

xi) (ಸೆಕ್$^{-1}x)^3$; xii) ಸೈನ್(m ಸೈನ್^{-1}x) ;

xiii) ಸೈನ್^{2} $2x^2$; xiv) ಕಾಟ್$^3x^2$;

xv) ಸೈನ್$4x$ ಕಾಸ್$3x$; xvi) x^3ಕೋಸೆಕ್^2x ;

xvii) x^{-1} ಸೈನ್$^{-1}$ x^{-1} ; xviii) ಕಾಸ್$^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$;

xix) ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right.$ಟ್ಯಾನ್$\left.\dfrac{x}{a}\right)$;

xx) (xಸೈನ್^{-1}x)$/\surd(1-x^2)$;

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಜನ್ಯವೊಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ :

i) ಸೈನ್$^{-1}[2x/(1+x^2)]$;

ii) ಕಾಸ್$^{-1}[(1-x^2)/(1+x^2)]$;

iii) ಟ್ಯಾನ್$^{-1}[2x/(1-x^2)]$.

[ಸೂಚನೆ : $x=$ ಟ್ಯಾನ್ θ ಹಾಕಿ.]

4. ಟ್ಯಾನ್$^{-1}[(x+\sqrt{x})/(1-x\sqrt{x})]$ನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

[ಸೂಚನೆ : ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು
ಟ್ಯಾನ್$^{-1}x+$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\sqrt{x}$ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ.]

5. $y=$ ಸೆಕ್ $x\pm$ ಟ್ಯಾನ್ x ಆದರೆ, $y'=y$ ಸೆಕ್ x ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $y=$ ಕೋಸೆಕ್ $x-$ ಕಾಟ್ x ಆದರೆ, $y'=y$ ಕೋಸೆಕ್ x ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $y=$ ಸೈನ್ $nx+$ ಕಾಸ್ nx ಆದರೆ,

$$y'=n(1-\text{ಸೈನ್ }2nx)^{\frac{1}{2}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. ಸೈನ್ x ರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳಾವುವು ?

9. ಕಾಸ್ x ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ?

10. xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಟ್ಯಾನ್ x ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು ಅನಂತವಾಗುತ್ತದೆ ?

2.33. ಸೂಚಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಅಂತರಣ [differentiation of the exponential function).

ರೂಢಜನ್ಯ : $\mathbf{De^x = e^x}$

ಸಾಧನೆ : $f(x) = e^x$ ಆದರೆ,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h},\ h \neq 0.$$

ಈಗ $h \to 0$ ಆದರೆ,

$$f'(x) = e^x, \qquad [\S\ 1.53]$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. e^{ax}ನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

$y = e^{ax}$ ಆದರೆ, $y = e^u$, $u = ax$.

$\therefore\ dy/du = e^u$, ಮತ್ತು $du/dx = a$. $\therefore\ dy/dx = ae^{ax}$.

2. a^xನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

$y = a^x = e^{x \log_e a}$. $\therefore$ ಮೇಲಿನಂತೆ $dy/dx = (\log_e a)a^x$.

[ಉದಾ : 1, §2.341 ನೋಡಿ.]

2.34. ಲಘುಮಿತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಅಂತರಣ (differentiation of the logarithmic function).

ರೂಢಜನ್ಯ : $\mathbf{D}$ ಲಾಗ್$_e \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$.

ಸಾಧನೆ : $f(x) =$ ಲಾಗ್$_e x$ ಆದರೆ,

$f(x+h) - f(x) =$ ಲಾಗ್$_e(x+h) -$ ಲಾಗ್$_e x$

$=$ ಲಾಗ್$_e \dfrac{x+h}{x} =$ ಲಾಗ್$_e\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$.

$$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h} \text{ ಲಾಗ್}_e \left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h} \text{ ಲಾಗ್}_e \left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\frac{\text{ಲಾಗ್}_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

ಈಗ $h\to 0$ ಆದರೆ,

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad [\S\ 1.54]$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y=$ ಲಾಗ್ ಲಾಗ್x ಆದರೆ. dy/dxನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
$y=$ ಲಾಗ್u, $u=$ ಲಾಗ್x. $\therefore\ dy/du=1/u$,
ಮತ್ತು $du/dx=1/x$. $\therefore\ dy/dx=1/(x \log x)$.

2. $y=$ ಲಾಗ್ ಸೈನ್x ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
ಮೇಲಿನಂತೆ, $dy/dx=$ ಕಾಟ್x.

2.341. ಲಘುಮಿತೀಯ ಅಂತರಣ (logarithmic differentiation).

ಗುಣಲಬ್ಧ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಥವಾ ಸೂಚಕ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಅಂತರಿಸುವಾಗ, ಮೊದಲು ಲಘುಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಸೌಲಭ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಮೊದಲು ಲಘುಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ತನ್ಮೂಲಕ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಲಘುಮಿತೀಯ ಅಂತರಣವೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ವಿಧಾನವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = a^x$ ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಘಾತವು ಸ್ಥಿರಿಯಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, (2), § 2.31ರ ಸೂತ್ರವು ಇದಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈಗ, ದತ್ತಸಮೀಕರಣದ ಎರಡುಕಡೆಯೂ e ಪೀಠಾಂಕಕ್ಕೆ (base) ಲಘುಮಿತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\text{ಲಾಗ್}_e y = x \text{ ಲಾಗ್}_e a.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು xಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \text{ಲಾಗ್}_e a.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \text{ಲಾಗ್}_e a.$$

[ಉದಾ. 2, § 2·33 ನೋಡಿ.]

2. $y = x^x$ ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಲಾಗ್}_e y = x \text{ ಲಾಗ್}_e x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \text{ಲಾಗ್}_e x.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \text{ಲಾಗ್}_e x).$$

3. $y = \text{ಲಾಗ್}_a x$ ಆದರೆ, y'ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಘುಮಿತಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ, ದತ್ತಸಮೀಕರಣವನ್ನು $a^y = x$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$y \text{ ಲಾಗ್}_e a = \text{ಲಾಗ್}_e x.$$

$$\therefore y' \text{ ಲಾಗ್}_e a = 1/x.$$

$$\therefore y' = \frac{1}{x \text{ ಲಾಗ್}_e a}$$

4. $y =$ ಲಾಗ್$_x a$ ಆದರೆ, y' ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x^y = a$. $\therefore$ y ಲಾಗ್$_e x =$ ಲಾಗ್$_e a$.

$$\therefore \quad \frac{y}{x} + y' \text{ ಲಾಗ್}_e x = 0.$$

$$\therefore \; y' = \frac{-y}{x \text{ ಲಾಗ್}_e x} = -\frac{\text{ಲಾಗ್}_x a}{x \text{ ಲಾಗ್}_e x}$$

5. $y = (\text{ಸೈನ್} x)^{\text{ಕಾಸ್} x}$ ಆದರೆ, y' ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಲಾಗ್}_e y = (\text{ಕಾಸ್} x)\text{ಲಾಗ್}_e \text{ ಸೈನ್} x.$$

$$\therefore \; (y'/y) = \text{ಕಾಸ್} x \text{ ಕಾಟ್} x - (\text{ಸೈನ್} x)\text{ಲಾಗ್}_e\text{ಸೈನ್} x,$$

[ಉದಾ. 2, § 2·34].

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ y ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ y' ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

6. $x^y = e^{x+y}$ ಆದರೆ, y' ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y \text{ ಲಾಗ್}_e x = x + y$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} + (\text{ಲಾಗ್}_e x)y' = 1 + y'.$$

$$\therefore \quad y' = \frac{y - x}{x(1 - \text{ಲಾಗ್}_e x)}$$

7. $y = \dfrac{xe^{x \text{ ಸೈನ್} x}}{\sqrt{(1+x)}}$ ಆದರೆ,

y' ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಲಾಗ್}_e y = \text{ಲಾಗ್}_e x + x\text{ಸೈನ್} x - \tfrac{1}{2} \text{ ಲಾಗ್}_e(1+x).$$

$$\therefore \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + x\text{ಕಾಸ್} x + \text{ಸೈನ್} x - \frac{1}{2(1+x)}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ y ಇಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, y' ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

2.35. ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of hyperbolic and inverse hyperbolic functions).

ರೂಢಜನ್ಯಗಳು :

(1) **D ಸೈನ್‌ಎಚ್‌x = ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌x.**

ಸಾಧನೆ : $y =$ ಸೈನ್‌ಎಚ್‌$x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌}x.$$

ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌x ಮುಂತಾದ ಉಳಿದ ಐದು ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣವೂ ಹೀಗೆಯೇ. ಅವುಗಳ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು § 2.211ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

(2) **D ಸೈನ್‌ಎಚ್‌$^{-1}$x $= \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$.**

ಸಾಧನೆ : $y =$ ಸೈನ್‌ಎಚ್‌^{-1}x ಆದರೆ, $x =$ ಸೈನ್‌ಎಚ್‌y.

$$\therefore \qquad \frac{dx}{dy} = \text{ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌}y.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌}y} = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{ಸೈನ್‌ಎಚ್‌}^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌^{-1}x ಮುಂತಾದ ಉಳಿದ ಐದು ವಿಲೋಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣವೂ ಹೀಗೆಯೇ. ಅವುಗಳ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು § 2.211ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಸೈನ್‌ಎಚ್‌xನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಅಂತರಿಸಿ.

2. $y =$ ಕಾಸ್‌ಎಚ್‌^{-1}x ಆದರೆ, dx/dy ನ್ನು ಪ್ರಭವದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (c)

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

i) e^{ax} ಸೈನ್$(bx+c)$; ii) ಕಾಸ್x ಕಾಸ್ಎಚ್x ;

iii) $e^{\text{ಸೈನ್}^{-1}x}$; iv) $e^{x\,\text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}x}$;

v) ಲಾಗ್$_e$ ಕಾಸ್x ; vi) ಸೈನ್ಲಾಗ್$_e x$;

vii) ಲಾಗ್$_e$ಲಾಗ್$_e$ಸೈನ್x ; viii) ಲಾಗ್$_x$ಸೈನ್x ;

ix) ಲಾಗ್$_2$ಟ್ಯಾನ್x ; x) 100^x ;

xi) $10^{\text{ಸೆಕ್}\,x^\circ}$; xii) $2^{\text{ಸೈನ್ಎಚ್}^{-1}x}$;

xiii) $\text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\dfrac{x+\text{ಲಾಗ್}\,x}{1-x\,\text{ಲಾಗ್}\,x}$; xiv) $\dfrac{x\,\text{ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್}^{-1}x}{1-x^2}$

xv) $\text{ಲಾಗ್}\sqrt{\dfrac{\text{ಕಾಸ್ಎಚ್}\,x+\text{ಸೈನ್ಎಚ್}\,x}{\text{ಕಾಸ್ಎಚ್}\,x-\text{ಸೈನ್ಎಚ್}\,x}}$;

xvi) $(\text{ಟ್ಯಾನ್}\,x)^{\text{ಕಾಟ್}\,x}$.

2. e^x ರೇಖೆಯು $y-$ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವೆಷ್ಟು ?

3. ಲಾಗ್$_e x$ ರೇಖೆಯು $x-$ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವೆಷ್ಟು ?

4. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸೈನ್ಎಚ್x ಮತ್ತು ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್x ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2.36. ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of parametric equations).

x, yಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಕೆಲವುವೇಳೆ ನೇರವಾಗಿ ದತ್ತವಾಗಿರದೆ, ಒಂದು ಪರಮಾನದ (parameter) ಮುಖಾಂತರ ದತ್ತವಾಗಿರ

ಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = at^2$, $y = 2at$. ಇಲ್ಲಿ t ಎಂಬುದು ಪರಮಾನ; a ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ಸ್ಥಿರಿ. ಈ ಸವಿಾಕರಣಗಳಿಂದ t ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ x, yಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸವಿಾಕರಣಗಳು x, yಗಳ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸವಿಾಕರಣಗಳಿಂದ t ಎಂಬ ಪರಮಾನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ (eliminate), $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ x, yಗಳ ನೇರವಾದ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಪರಮಾನದ ವಿಸರ್ಜನೆಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಇಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಅಲ್ಲದೆ, ಪರಮಾನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸಂಬಂಧವು ಯಾವಾಗಲೂ ಅನುಕೂಲವಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ಹೇಳುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ, ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು

$$x = f(t), \quad y = \phi(t)$$

ಎಂಬ ಪರಮಾನ ಸವಿಾಕರಣಗಳಿಂದ ದತ್ತವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಸವಿಾಕರಣಗಳಿಂದ t ಎಂಬ ಪರಮಾನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸದೆಯೇ dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಈ ಸವಿಾಕರಣಗಳ ಅಂತರಣದಿಂದ

$$\frac{dx}{dt} = f'(t)\,; \quad \frac{dy}{dt} = \phi'(t).$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)}.$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x = at^2$, $y = 2at$ ಎಂಬ ಪರಮಾನ ಸವಿಾಕರಣಗಳಿಂದ dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ t ಎಂಬುದು ಪರಮಾನವೆಂದೂ, a ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದೂ ಅಧ್ಯಾಹಾರ (understood). ಈಗ,

$$\frac{dx}{dt} = 2at\,; \quad \frac{dy}{dt} = 2a.$$

$$\therefore \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{t}.$$

ಅಥವಾ ದತ್ತಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ tಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ, ಆಮೇಲೆ dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

[ಉದಾ. 2, § 2.38 ನ್ನು ನೋಡಿ.]

2. $x = a(\theta -$ ಸೈನ್$\theta)$, $y = a(1 -$ ಕಾಸ್$\theta)$ ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ θ ಎಂಬುದು ಪರಮಾನವೆಂದೂ, a ಎಂಬುದು ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದೂ ಅಧ್ಯಾಹಾರ. ಈಗ

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta)\,; \quad \frac{dy}{d\theta} = a\ \text{ಸೈನ್}\,\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{ಸೈನ್}\,\theta}{1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta} = \text{ಕಾಟ್}\,\frac{\theta}{2}.$$

ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ θವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸುವುದು ಸುಲಭವೂ ಅಲ್ಲ, ವಿಹಿತವೂ ಅಲ್ಲ.

2·37. ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸುವಿಕೆ (differentiation of one function w.r.t. another).

ಕೆಲವು ವೇಳೆ $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು $\phi(x)$ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $y = f(x)$, $z = \phi(x)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, dy/dz ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಒಂದು ಪರಮಾನವನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, § 2·36 ನ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಅನುಸರಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. x^2ನ್ನು x^3ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

$y = x^2$, ಮತ್ತು $z = x^3$ ಆದರೆ, $dy/dx = 2x$, ಮತ್ತು $dz/dx = 3x^2$.

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy/dx}{dz/dx} = \frac{2}{3x}.$$

2. ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ ನ್ನು ಸೈನ್$^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $x =$ ಟ್ಯಾನ್$\frac{1}{2}t$ ಹಾಕಿದರೆ, ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳೆರಡೂ t ಆಗುತ್ತವೆ. $\therefore$ ಉತ್ತರ: $dt/dt = 1$.

2·38. ಧ್ವನಿತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of implicit functions).

x, y ಗಳ ಸಂಬಂಧವು

$$y = f(x)$$

ಎಂಬ **ಪ್ರಕಟ** (explicit) ರೂಪದಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರದೆ,

$$f(x, y) = 0$$

ಎಂಬ **ಧ್ವನಿತ** (implicit) ರೂಪದಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರಬಹುದು. $y = f(x)$ ಎಂಬ ಪ್ರಕಟರೂಪದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಆದರೆ $f(x, y) = 0$ ಎಂಬ ಧ್ವನಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು yಗಳು ಒಂದೇಕಡೆ ಮಿಶ್ರಿತವಾಗಿವೆ. ಧ್ವನಿತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ಪ್ರಕಟ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿಸುವುದು ಸುಲಭಸಾಧ್ಯವಾಗದಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ವಿಹಿತವಿಲ್ಲವೆನಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = 3x^2 - 4x + 2$ ಎಂಬುದೊಂದು ಪ್ರಕಟ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. $5x^2 + 3xy + 2y^2 - 1 = 0$ ಎಂಬುದೊಂದು ಧ್ವನಿತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. ಮತ್ತೆ $y^2 - x = 0$ ಎಂಬ ಧ್ವನಿತ ರೂಪವನ್ನು

$y = \pm\sqrt{x}$ ಎಂಬ ಪ್ರಕಟ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆದರೆ, $5x^2+3xy+2y^2-1=0$ ಎಂಬ ಧ್ವನಿತ ರೂಪವನ್ನು ಪ್ರಕಟ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ ಧ್ವನಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದೇ ಅನೇಕವೇಳೆ ವಿಹಿತವೆನಿಸುತ್ತದೆ.

$f(x, y)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು yಯನ್ನು xನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸುವುದು ಕೆಲವು ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ. ಈ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸುವ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗೆ ಅಸ್ತಿತ್ವ ಸಂಸಿದ್ಧಿ (existence theorem) ಎಂದು ಹೆಸರು.

[A.F.R.V. § 10.63, P. 206 ನೋಡಿ].

ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ ಆ ನಿಬಂಧನೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಅಂಗೀಕರಿಸೋಣ.

ಈಗ $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ಧ್ವನಿತ ರೂಪದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^3-3xy+y^3-1=0$ ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dx^3}{dx}-3\frac{d(xy)}{dx}+\frac{dy^3}{dx}=0.$$

ಎಂದರೆ, $3x^2-3\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+\frac{dy^3}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$;

[(5), § 2.22].

ಎಂದರೆ, $3x^2-3\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

$$\therefore\ (y^2-x)\frac{dy}{dx}=y-x^2.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : (5), § 2.22 ರ ಪ್ರಕಾರ

$$\frac{d\phi(y)}{dx} = \frac{d\phi(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ yನ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸ ಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲು ಅದನ್ನು yನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ dy/dxನಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

2. $y^2 - 4ax = 0$ ಆದರೆ, dy/dxನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2yy' - 4a = 0. \quad \therefore\ y' = 2a/y.$$

ಅಥವಾ ದತ್ತಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y = 2\sqrt{(ax)}$ ಎಂಬ ಪ್ರಕಟ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದು ಅಂತರಿಸಬಹುದು.

[ಉದಾ. 1, § 2·36 ನೋಡಿ.]

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಆದರೆ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2ax + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad (hx + by + f)\frac{dy}{dx} = -(ax + hy + g)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}.$$

2.39. ಚೌಬಂಧಗಳ ಅಂತರಣ (differentiation of determinants).

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಒಂದು ಚೌಬಂಧದ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಅಂತರಣವು ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಪ್ರಾಥಮಿಕವಾಗಿ,

$$D\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Du_1, & u_2 \\ Dv_1, & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1, & Du_2 \\ v_1, & Dv_2 \end{vmatrix} \quad \text{.... (i)}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $u_1, u_2, \ldots$ ಮುಂತಾದ ಅಕ್ಷರಗಳು $u_1(x), u_2(x), \ldots$ ಮುಂತಾದ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತವೆ.

$$f = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}$$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$$f + \delta f = \begin{vmatrix} u_1 + \delta u_1, & u_2 + \delta u_2 \\ v_1 + \delta v_1, & v_2 + \delta v_2 \end{vmatrix}.$$

$$\therefore \quad \delta f = \begin{vmatrix} \delta u_1, & u_2 \\ \delta v_1, & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1, & \delta u_2 \\ v_1, & \delta v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta u_1, & \delta u_2 \\ \delta v_1, & \delta v_2 \end{vmatrix}.$$

ಮತ್ತೆ $\delta x \neq 0$ ಆದರೆ,

$$\therefore \quad \frac{\delta f}{\delta x} = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta u_1}{\delta x}, & u_2 \\ \dfrac{\delta v_1}{\delta x}, & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1, & \dfrac{\delta u_2}{\delta x} \\ v_1, & \dfrac{\delta v_2}{\delta x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\delta u_1}{\delta x}, & \delta u_2 \\ \dfrac{\delta v_1}{\delta x}, & \delta v_2 \end{vmatrix}.$$

ಈಗ $\delta x \to 0$ ಆದರೆ, ಮೇಲಿನ (i) ಎಂಬ ಫಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಇದೇರೀತಿ n ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ (order) ಚೌಬಂಧವನ್ನು ಅಂತರಿಸಬಹುದು. "ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಲನ್ನು (row) [ಅಥವಾ ಒಂದು ಸ್ತಂಭವನ್ನು (column)] ಮಾತ್ರ ಅಂತರಿಸು" ಎಂಬುದು ಚೌಬಂಧಗಳ ಅಂತರಣ **ಸೂತ್ರ**. ಎಂದರೆ, ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಲನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅಂತರಿಸಿ, ಉಳಿದ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಹಾಗೆಯೇ ಇರಿಸಿ, ಹಾಗೆ ಬಂದ ಚೌಬಂಧಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಕೂಡಬೇಕು ; ಸಾಲುಗಳ ಬದಲು ಸ್ತಂಭಗಳಾಗಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಮೂರನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಚೌಬಂಧದ ಅಂತರಣಕ್ಕೆ ತಾಳೆ ಮಾಡಿ (verify).

2. $$f(x) = \begin{vmatrix} x, & 1, & 1 \\ 1, & x^2, & 1 \\ 1, & 1, & x^3 \end{vmatrix}$$

ಆದರೆ, $f'(x)$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಿಂದ

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & x^2, & 1 \\ 1, & 1, & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x, & 1, & 1 \\ 0, & 2x, & 0 \\ 1, & 1, & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x, & 1, & 1 \\ 1, & x^2, & 1 \\ 0, & 0, & 3x^2 \end{vmatrix}$$

$$= 6x^5 - 3x^2 - 2x - 1.$$

ದತ್ತ ಚೌಬಂಧವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ, ತರುವಾಯ ಅಂತರಿಸಿ, ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (d)

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = a$ ಕಾಸ್θ, $y = b$ ಸೈನ್θ, (ಪರಮಾನ θ);

(ii) $x = ct$, $y = c/t$, (ಪರಮಾನ t).

2. ಮೇಲಿನ ಲೆಖ್ಖದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪರಮಾನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ, dy/dx ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಸೈನ್xನ್ನು ಸೈನ್ಎಚ್xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

4. ಲಾಗ್ಸೈನ್xನ್ನು ಸೈನ್ಲಾಗ್xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ dy/dxನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $x^2+y^2=r^2$;

ii) $x^2+y^2-6x+8y-1=0$;

iii) $(\text{ಸೈನ್}\, x)^y=(\text{ಕಾಸ್}\, y)^x$.

6.
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$
ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವೆಷ್ಟು ?

7.
$$D\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & x, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & x, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & x \end{vmatrix}=3(x-1)^2$$
ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2·4. ಮಾಡಿದ ಲೆಖ್ಖಗಳು (worked examples).

1. $\sqrt{(1-x^2)}+\sqrt{(1-y^2)}=a(x-y)$

ಆದರೆ,
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$x=\text{ಸೈನ್}\ \theta$, ಮತ್ತು $y=\text{ಸೈನ್}\ \phi$ ಆದರೆ, ಆಗ
$\text{ಕಾಸ್}\ \theta+\text{ಕಾಸ್}\ \phi=a\,(\text{ಸೈನ್}\ \theta-\text{ಸೈನ್}\ \phi)$.

$$\therefore \qquad \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{1}{a}.$$

$$\therefore \qquad \theta-\phi=k.$$

ಎಂದರೆ,
$$\text{ಸೈನ್}^{-1}x-\text{ಸೈನ್}^{-1}y=k.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

2. $lx =$ ಲಾಗ್ x, $l^2 x =$ ಲಾಗ್ ಲಾಗ್ x, ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ

$$D(l^n x) = \frac{1}{x(lx)(l^2 x) \cdots (l^{n-1} x)}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$D(l^n x) = D\text{ಲಾಗ್}(l^{n-1} x) = \frac{D(l^{n-1} x)}{l^{n-1} x}.$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ n ಗೆ ಬದಲು $n-1$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$D(l^{n-1} x) = \frac{D(l^{n-2} x)}{l^{n-2} x}.$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ

$$D(l^n x) = \frac{D(l^{n-2} x)}{(l^{n-2} x)(l^{n-1} x)}.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, n ನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ,

$$D(l^n x) = \frac{D(lx)}{(lx)(l^2 x) \cdots (l^{n-1} x)}.$$

ಆದರೆ, $D(lx) = 1/x$

$$\therefore \quad D(l^n x) = \frac{1}{x(lx)(l^2 x) \cdots (l^{n-1} x)}.$$

3. $$\frac{P}{Q} = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \; \frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{a_{n-1} +} \; \frac{1}{x}$$

ಆದರೆ, $$\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{(-1)^{-n1}}{Q^2}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಂಪರ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ (continued fractions), ರೂಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಕೇತದ ಪ್ರಕಾರ,

$$p_n = a_n \, p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2},$$

ಮತ್ತು $$p_n\, q_{n-1} - p_{n-1}\, q_n = (-1)^n.$$

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಲ್ಲಿ

$$P = p_n,\ Q = q_n,\ \text{ಮತ್ತು}\ \ x = a_n.$$

$$\therefore\quad P = xp_{n-1} + p_{n-2}\ \text{ಮತ್ತು}\ Q = xq_{n-1} + q_{n-2}.$$

$$\therefore\quad \frac{dP}{dx} = p_{n-1},\ \text{ಮತ್ತು}\ \frac{dQ}{dx} = q_{n-1}.$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{QP' - Q'P}{Q^2}$$

$$= \frac{I}{Q^2}[(xq_{n-1} + q_{n-2})p_{n-1} - (xp_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1}]$$

$$= \frac{1}{Q^2}(p_{n-1}\, q_{n-2} - p_{n-2}\, q_{n-1})$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{Q^2}.$$

2.5. ಅಂತರಾಂಶಗಳು (differentials).

§ 2.1 ರಲ್ಲಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\delta y/\delta x$ ನ ಪರಿಮಿತಿಯು ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವೆಂದೂ, ಈ ಪರಿಮಿತಿಯ ಚಿಹ್ನೆಯು dy/dx ಎಂದೂ, ಈ ಚಿಹ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಶ, ಛೇದ ಎಂಬ ಅರ್ಥವೇನೂ ಇಲ್ಲವೆಂದೂ ನಿರೂಪಿಸಲಾಯಿತಷ್ಟೆ. ಆದರೆ, ಈ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಧಾರಣ ರಾಶಿಯನ್ನಾಗಿ (ratio) ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯ, ಮತ್ತು ಕಲನದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ವಿಹಿತ. ಈ ಪರಿಗಣನೆಯನ್ನು ಈಗ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

$$\delta x \to 0\ \text{ಆದಾಗ},\ \delta y/\delta x \to f'(x).$$

$$\therefore\quad \frac{\delta y}{\delta x} = f'(x) + \epsilon,\ (\delta x\text{ನ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ}\ \epsilon \to 0).$$

$$\therefore\quad \delta y = f'(x)\delta x + \epsilon\,\delta x.$$

ಈಗ $f'(x)\delta x$ನ್ನು dy ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ; ಎಂದರೆ,

$$dy = f'(x)\delta x \qquad \ldots. \quad \text{(i)}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸೋಣ (define). ಈ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ

$$dx = \delta x$$

ಆಗಲೇಬೇಕು. ಹೇಗೆಂದರೆ, (i) ರಲ್ಲಿ $y = x$ ಹಾಕಿದಾಗ, ಎಂದರೆ, (i) ನ್ನು $y = x$ ಎಂಬ ಪ್ರತ್ಯೇಕ (particular) ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಹೊಂದಿಸಿದಾಗ, $f'(x) = 1$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $dx = \delta x$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ (i) ರಿಂದ

$$dy = f'(x)dx \qquad \ldots. \quad \text{(ii)}$$

ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿತವಾದ dy ಮತ್ತು dx ಗಳಿಗೆ **ಅಂತರಾಂಶಗಳು** (differentials) ಎಂದು ಹೆಸರು. (ii) ರ ಪ್ರಕಾರ $f'(x)$ ನ್ನು ಈ ಅಂತರಾಂಶಗಳ ಧಾರಣರಾಶಿಯನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

2.51. ಅಂತರಾಂಶಗಳ ರೇಖಾರ್ಥ ನಿವರಣೆ (geometrical interpretation of differentials).

ಮೇಲೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ dx ಮತ್ತು dy ಎಂಬ ಅಂತರಾಂಶಗಳು ಆಕೃತಿ 2–1 ಅಥವಾ 2–2 ರಲ್ಲಿ PR ಮತ್ತು RT ಆಗುತ್ತವೆ. $f'(x) =$ ಟ್ಯಾನ್ ψ ಯನ್ನು, $PR \to 0$ ಆದಾಗ RQ /PR ನ ಪರಿಮಿತಿಯೆಂದಾದರೂ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ PRT ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ RT/PR ಎಂಬ ಧಾರಣರಾಶಿಯೆಂದಾದರೂ, ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದಷ್ಟೆ. ಅದನ್ನು RQ/PR ನ ಪರಿಮಿತಿಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, dy/dx ಎಂಬುದು ಕೇವಲ ಒಂದು ಚಿಹ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಹೊರತು, ಧಾರಣರಾಶಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಲ್ಲದೆ, ಟ್ಯಾನ್ ψ ಯನ್ನು RT/PR ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, dy/dx ಎಂಬುದು dy ಮತ್ತು dx ಎಂಬ ಎರಡು ಅಂತರಾಂಶಗಳ ಧಾರಣರಾಶಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

$dy (= RT)$ ಎಂಬ ಅಂತರಾಂಶವು PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ y–ವರ್ಧನ (y – increment of PT).

2.52. ಅಂತರಾಂಶಗಳು ಮತ್ತು ಸಂಕಲನಾದಿ ವಿಧಾನಗಳು (differentials and arithmetical processes).

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \qquad [(1), \S\ 2.22],$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು dx ಎಂಬ ಅಂತರಾಶದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$$d(u+y) = du + dv$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$$d(-v) = -dv,$$

$$d(uv) = udv + vdu,$$

ಮತ್ತು $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \; v \neq 0.$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

1. $$\frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{ಕಾಸ್}^{-1} \frac{a \text{ ಕಾಸ್} x + b}{a + b \text{ ಕಾಸ್} x},$$

ಮತ್ತು $$\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} \left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ಟ್ಯಾನ್} \frac{x}{2}\right\}$$

ಎಂಬ ಎರಡು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೂ x–ಜನ್ಯವು ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಆ ಜನ್ಯವಾವುದು ?

2. $$\theta = \text{ಕಾಸ್}^{-1}\frac{r}{a} - \frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{r})$$

ಆದರೆ, $dr/d\theta$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಲಾಗ್ ಕಾಸ್ಎಚ್xನ್ನು ಕಾಸ್ಎಚ್ ಲಾಗ್xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

4. $$\text{ಸೈನ್}^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\text{ಕಾಸ್}^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$\text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

5. ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\dfrac{x(1+e^x)}{1-x^2e^x}$ ನ್ನು ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ.

6. $x=a$ ಸೆಕ್ θ, $y=b$ ಟ್ಯಾನ್ θ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು

$x=a$ ಕಾಸ್ಎಚ್ θ, $y=b$ ಸೈನ್ಎಚ್ θ

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದಲೂ ರೂಪಿಸಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ರೇಖೆಗೆ (a ಸೆಕ್θ, b ಟ್ಯಾನ್θ) ಮತ್ತು (a ಕಾಸ್ಎಚ್θ, b ಸೈನ್ಎಚ್θ) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ dy/dxನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. $$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

ಆದರೆ, dy/dxನ್ನು tನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ tಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ, ತನ್ಮೂಲಕ dy/dxನ್ನು x, yಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ dy/dxನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$; (ii) $x^y=e^{x+y}$;

(iii) (ಟ್ಯಾನ್ $x)^y=($ಕಾಟ್ $y)^x$.

9. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ x–ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $y=x^{x^{x^{\cdots}}}$;

ii) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\ldots\ldots}}}$;

iii) $y = x + \frac{1}{x+} \cdot \frac{1}{x+} \ldots.$;

10. $f_n(x) = \begin{vmatrix} x, & 1, & 1, & \ldots & 1 \\ 1, & x, & 1, & \ldots & 1 \\ 1, & 1, & x, & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & 1, & \ldots & x \end{vmatrix}$

ಆದರೆ,

$$f'_n(x) = n f_{n-1}(x)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ III

ಅನುಕ್ರಮ ಅಂತರಣ

(successive differentiation)

3.1. ವಿವರಣೆ ಮತ್ತು ಸಂಕೇತ (explanation and notation).

$f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $f'(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಜನ್ಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಜನ್ಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಅಂತರಣೀಯವಾಗಿರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅಂತರಿಸಿ, ಹಾಗೆ ಲಬ್ಧವಾಗುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು $f''(x)$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಅಲ್ಲಿಗೆ $f''(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಎರಡನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಜನ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾಯಿತು. ಮತ್ತೆ $f''(x)$ ಅಂತರಣೀಯವಾಗಿರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಅಂತರಿಸಿ $f'''(x)$ ಎಂಬ, $f(x)$ ನ ಮೂರನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಜನ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವವರೆಗೂ $f(x)$ನ್ನು ಪುನಃಪುನಃ ಅಂತರಿಸಿ, ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಜನ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತ ಹೋಗಬಹುದು. $f(x)$ನ nನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಜನ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು $f^n(x)$, $f_n(x)$, y_n, d^ny/dx^n, ಅಥವಾ D^ny ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಈ ಸಂಕೇತದ ಪ್ರಕಾರ ಮೂಲ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾದ $f(x)$ನ್ನು ಅವಶ್ಯಕವಾದಾಗ $f^0(x)$, $f_0(x)$, ಅಥವಾ y_0 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 4$$

ಆದರೆ, ಆಗ $f'(x) = 15x^2 - 6x + 2,$

$$f''(x) = 30x - 6$$

$$f'''(x) = 30$$

$$f''''(x) = 0 = f^5(x) = \dots = f^n(x).$$

3.2. n ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಜನ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ (finding the derivative of the n^{th} order).

$f(x)$ ದತ್ತವಾದಾಗ $f^{n}(x)$ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ ಸರ್ವವ್ಯಾಪಿಯಾದ ಏಕೈಕ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $f(x)$ನ ಅನುಕ್ರಮ ಜನ್ಯಗಳು ಬರುಬರುತ್ತ ಹೆಚ್ಚುಹೆಚ್ಚು ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿ ಯಾವ ಒಂದು ಸೂತ್ರಕ್ಕೂ ಒಳಪಡದೆ ಹೋಗಬಹುದು. ಆದರೆ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಕೆಲವು ರೂಢರೂಪಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $f^{n}(x)$ ಎಂಬ ಜನ್ಯವನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾದ ಸೂತ್ರಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈಗ ಈ ರೂಢರೂಪಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

3.3. n ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ರೂಢಜನ್ಯಗಳು (standard n^{th} derivatives).

1. $\mathbf{y = x^m}$

ಆದರೆ, ಆಗ $y_1 = mx^{m-1}$,

$y_2 = m(m-1)x^{m-2}$,

$y_3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$,

. . . .

$$\mathbf{y_n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}}.$$

2. $\mathbf{y = \dfrac{1}{x+a}}$

ಆದರೆ, ಆಗ $y_1 = \dfrac{-1}{(x+a)^2}$,

$y_2 = \dfrac{-1\cdot-2}{(x+a)^3}$,

. . . .

$$\mathbf{y_n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}}}.$$

3. $\mathbf{y =}$ **ಲಾಗ್**$\mathbf{_e(x+a)}$

ಆದರೆ, ಆಗ $y_1 = \frac{1}{x+a}$.

$$\mathbf{y_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x+a)^n}},$$ [(2) ರಿಂದ].

4. $\mathbf{y = e^{ax}}$

ಆದರೆ, ಆಗ $y_1 = ae^{ax}$,

$y_2 = a^2e^{ax}$,

. . . . .

$\mathbf{y_n = a^n e^{ax}}$.

5. $\mathbf{y =}$ **ಸೈನ್**$\mathbf{x}$

ಆದರೆ, ಆಗ $y_1 =$ ಕಾಸ್$x =$ ಸೈನ್$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $y_2 =$ ಸೈನ್$\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

. . . .

$\mathbf{y_n =}$ **ಸೈನ್**$\mathbf{\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)}$.

6. $\mathbf{y =}$ **ಕಾಸ್**$\mathbf{x}$

ಆದರೆ, ಆಗ $y_1 = -$ ಸೈನ್$x =$ ಕಾಸ್$\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$y_2 =$ ಕಾಸ್$\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

. . . .

$$\mathbf{y_n} = \text{ಕಾಸ್}\left(\mathbf{x}+\mathbf{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : $y = \frac{\text{ಸೈನ್}}{\text{ಕಾಸ್}}\, ax$ ಆದರೆ, $y_n = a^n \frac{\text{ಸೈನ್}}{\text{ಕಾಸ್}}\left(ax+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y=(ax+b)^m$ ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y_1 = am(ax+b)^{m-1}, \ . \ . \ . \ ,$

$y_n = a^n m(m-1) \ . \ . \ . \ (m-n+1)(ax+b)^{m-n}.$

2. $$y=\frac{2x-5}{(x-1)(x-2)}$$

ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

yನ್ನು ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಒಡೆದರೆ,

$$y=\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x-2}, \qquad \text{(ಉದಾ. 1, § 1.57)}.$$

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ರೂಢರೂಪ (2) ರಿಂದ

$$y_n = 3\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

3. $$y=\text{ಲಾಗ್}_e\frac{x+1}{2x-1}$$

ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y=\text{ಲಾಗ್}_e(x+1)-\text{ಲಾಗ್}_e(2x-1)$$

ಈಗ, ಮೇಲಿನ ರೂಢರೂಪ (3) ರಿಂದ,

$$y_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+1)^n}-2^n\frac{(-1)^n\cdot(n-1)!}{(2x-1)^n}.$$

4 $y = 100^x$ ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಾಗ್ $y = x$ ಲಾಗ್ 100. $\therefore$ $y_1 =$ (ಲಾಗ್ 100)y ;

$y_2 =$ (ಲಾಗ್ 100)$^2 y$; . . . ; $y_n =$ (ಲಾಗ್ 100)$^n y$

ಅಥವಾ, $y = e^{x \text{ ಲಾಗ್ } 100}$. $\therefore$ ಮೇಲಿನ ರೂಢರೂಪ (4) ರ ಪ್ರಕಾರ, $y_n =$ (ಲಾಗ್ 100)$^n e^{x \text{ ಲಾಗ್ } 100}$

$=$ (ಲಾಗ್ 100)$^n \cdot 100^x$.

5. $y =$ ಸೈನ್ $5x$ ಕಾಸ್ $2x$ ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y =$ ಸೈನ್ $7x +$ ಸೈನ್ $3x$. $\therefore$ ಮೇಲಿನ ರೂಢರೂಪ (5) ರ ಪ್ರಕಾರ

$$y_n = 7^n \text{ ಸೈನ್}\left(7x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \text{ ಸೈನ್}\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

6. $y =$ ಸೈನ್$^2 x$ ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \frac{1}{2}(1 -$ ಕಾಸ್ $2x)$. $\therefore$ ಮೇಲಿನ ರೂಢರೂಪ (6) ರ ಪ್ರಕಾರ, $y_n = -2^{n-1} \text{ ಕಾಸ್}\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

7. $y = e^{ax}$ ಸೈನ್$(bx + c)$ ಆದರೆ, y_nನನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y_1 = ae^{ax}$ ಸೈನ್ $(bx + c) + be^{ax}$ ಕಾಸ್$(bx + c)$

$= e^{ax}[a$ ಸೈನ್$(bx + c) + b$ ಕಾಸ್$(bx + e)]$

ಇಲ್ಲಿ $a = r$ ಕಾಸ್θ, ಮತ್ತು $b = r$ ಸೈನ್θ ಹಾಕೋಣ ; ಎಂದರೆ, $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, $\theta =$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}$ (b/a). ಆಗ

$y_1 = e^{ax}[r$ ಕಾಸ್θ ಸೈನ್$(bx + c) + r$ ಸೈನ್θ ಕಾಸ್$(bx + c)]$

$= re^{ax}$ ಸೈನ್$(bx + c + \theta)$

ಹೀಗೆಯೇ, $y_2 = r^2 e^{ax}$ಸೈನ್$(bx + c + 2\theta)$, ಇತ್ಯಾದಿ ;

$y_n = r^n e^{ax}$ ಸೈನ್$(bx + c + n\theta)$

$$= (a^2+b^2)^{n/2} e^{ax} \text{ ಸೈನ್}\left(bx+c+n \text{ ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಇದೇ ರೀತಿ, $y = e^{ax}$ ಕಾಸ್ $(bx+c)$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$y_n = (a^2+b^2)^{n/2} e^{ax} \text{ ಕಾಸ್}\left(bx+c+n \text{ ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

3.4. ಲೈಬ್ನಿಸ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿ (Leibnitz's theorem).

$u(x)$, $v(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ nನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಜನ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಲೈಬ್ನಿಸ್ ಎಂಬ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಅದೇನೆಂದರೆ :

u,v ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮ ಜನ್ಯಗಳಿರುವವರೆಗೆ

$$(\mathbf{uv})_n = \mathbf{u}_0\mathbf{v}_n + {}_n\mathbf{C}_1\mathbf{u}_n\mathbf{v}_{n-1} + {}_n\mathbf{C}_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_{n-2} + \ldots + {}_n\mathbf{C}_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_{n-r} + \ldots + \mathbf{u}_n\mathbf{v}_0 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

ಸಾಧನೆ : ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನುಪ್ರೇರಣಾ ವಿಧಾನದಿಂದ (method of induction) ಸಾಧಿಸೋಣ.

(i) ರಲ್ಲಿ $n=1$ ಹಾಕಿದರೆ, $(uv)_1 = u_0v_1 + u_1v_0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. § 2.3 ರಿಂದ ಇದು ಸಾಧು.

ಈಗ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು ಸಾಧುವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಅದರ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸೋಣ. ಆಗ

$$\begin{aligned}(uv)_{n+1} = u_0v_{n+1} &+ u_1v_n \\ &+ {}_nC_1u_1v_n + {}_nC_1u_2v_{n-1} \\ &+ {}_nC_2u_2v_{n-1} + {}_nC_2u_3v_{n-2} \\ &+ \ldots \\ &+ {}_nC_{r-1}u_{r-1}v_{n-r+2} + {}_nC_{r-1}u_rv_{n-r+1} \\ &+ {}_nC_ru_rv_{n-r+1} + \ldots \\ &+ u_nv_1 + u_{n+1}v_0.\end{aligned}$$

$$= u_o v_{n+1} + ({}_nC_o + {}_nC_1)u_1 v_n + ({}_nC_1 + {}_nC_2)u_2 v_{n-1} + \cdots + ({}_nC_{r-1} + {}_nC_r)u_r v_{n-r+1} + \cdots + u_{n+1}v_o.$$

ಆದರೆ,

$${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r.$$

$$\therefore\ (uv)_{n+1} = u_o v_{n+1} + {}_{n+1}C_1 u_1 v_n + {}_{n+1}C_2 u_2 v_{n-1} + \ldots + {}_{n+1}C_r u_r v_{n-r+1} + \cdots + u_{n+1}v_o \cdots \quad (ii).$$

ಈಗ (i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಹೋಲಿಸೋಣ. (i) ರಲ್ಲಿ nಗೆ ಬದಲು $n+1$ ಹಾಕಿದರೆ (ii) ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲೈಬ್ನಿಸನ ಸೂತ್ರವು uv ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧದ n ಅಂತರಣಗಳಿಗೆ ಹೊಂದುವುದಾದರೆ, ಅದು $n+1$ ಅಂತರಣಗಳಿಗೂ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ $n=1$ ಆದಾಗ ಈ ಸೂತ್ರವು ಹೊಂದುತ್ತದೆಯೆಂದು ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅನುಪ್ರೇರಣಾನುಸಾರವಾಗಿ ಸೂತ್ರವು ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = x^2$ ಸೈನ್x ಆದರೆ, y_n ನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲೈಬ್ನಿಸನ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$y_n = x^2\ \text{ಸೈನ್}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + n\cdot 2x\cdot \text{ಸೈನ್}\left(x + \overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\cdot \text{ಸೈನ್}\left(x + \overline{n-2}\frac{\pi}{2}\right).$$

2. $y = x^3 e^{ax}$ ಆದರೆ,

$$y_n = x^3 a^n e^{ax} + n\cdot 3x^2\cdot a^{n-1}e^{ax} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 6x\cdot a^{n-2}e^{ax} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 6\cdot a^{n-3}\cdot e^{ax}.$$

3. $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು n ಸಲ ಅಂತರಿಸಿ.

$$(x^2y_2)_n = x^2y_{n+2} + n\cdot 2x\cdot y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2\cdot y_n\,;$$
$$(xy_1)_n = \qquad xy_{n+1} + ny_n\,;$$
$$(y)_n = \qquad y_n$$

ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಸಂಕಲಿಸಿದರೆ,

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$$ ಉತ್ತರ.

4. $y =$ ಸೈನ್$(m$ ಸೈನ್$^{-1}x)$ ಆದರೆ,

$$(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0,$$

ಮತ್ತು $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$y_1 = \text{ಕಾಸ್}(m\,\text{ಸೈನ್}^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

$$\therefore \qquad (1-x^2)y_1^{\,2} = m^2 - m^2y^2.$$

ಪುನರಂತರಣದಿಂದ

$$(1-x^2)2y_1y_2 - 2xy_1^{\,2} + 2m^2yy_1 = 0$$

$$\therefore \qquad (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು n ಸಲ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$\Big[(1-x^2)y_{n+2} + n(-2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}(-2)y_n$$
$$- xy_{n+1} \qquad - ny_n$$
$$+ m^2y_n\Big] = 0$$

ಎಂದರೆ, $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0.$

5. **ವಾಂಡರ್‌ಮಾಂಡೆಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿ (Vandermonde's theorem).**

m ಮತ್ತು n ನಿಜಾಂಕಗಳಾಗಿಯೂ, r ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿಯೂ ಇದ್ದು $m(m-1)(m-2)....(m-r+1)$ ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು m_r ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$(m+n)_r = m_r + {}_1C_1 m_{r-x} n_1 + {}_rC_2 m_{r-2} n_2 + \cdots$$
$$+ rC_p m_{r-p} n_p + \cdots + n_r \cdots \qquad \text{(i).}$$

ಸಾಧನೆ : $$x^{m+n} = x^m \cdot x^n$$

ಎಂಬ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು xನ ಗೌರವಕ್ಕೆ r ಸಲ ಅಂತರಿಸಿದರೆ, ಲೈಬ್ನಿಸನ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ,

$$(m+n)_r x^{m+n-r} = [x^n m_r x^{m-r} + rC_1 m_{r-1} x^{m-r+1} n_1 x^{n-1}$$
$$+ {}_rC_2 m_{r-2} x^{m-r+2} \cdot n_2 x^{n-2} + \cdots$$
$$+ rC_p m_{r-p} x^{m-r+p} \cdot n_p x^{n-p} + \cdots$$
$$+ x^m n_r x^{n-r}]$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಡೆಯೂ $x=1$ ಹಾಕಿದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (i) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3

1. $$\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $y =$ ಟ್ಯಾನ್ $(x+y)$ ಆದರೆ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{y^5}(1+y^2)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. (i) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ ಆದರೆ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h^2 - ab}{(hx+by)^3}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ii) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಆದರೆ,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{abc+2bgh-af^2-bg^2-ch^2}{(hx+by+f)^3}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $y=$ ಕಾಸ್ x^2 ಆದರೆ,

$$xy''-y'+4x^3y=0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. ಟ್ಯಾನ್ $y=x$ ಆದರೆ,

$$(1+x^2)y_2+2xy_1=0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $x=a$ ಕಾಸ್ $nt+b$ ಸೈನ್ nt ಆದರೆ,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ n ನೆಯ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$; ii) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$;

iii) ಟ್ಯಾನ್ಎಚ್ ^{-1}x; iv) ಲಾಗ್ $_e(ax+b)$;

v) ಲಾಗ್ $_e\frac{\sqrt{(2x+3)}}{\sqrt{(3x+2)}}$; vi) ಸೈನ್ ^3x;

vii) ಸೈನ್ $2x$ ಸೈನ್ $3x$; viii) ಕಾಸ್ $3x$ ಕಾಸ್ಎಚ್ $4x$;

ix) $(x$ ಕಾಸ್ $x)^2$; x) $(xe^x)^3$.

8. $y=x^2e^x$ ಆದರೆ,

$$y_n=\tfrac{1}{2}n(n-1)y_2-n(n-2)y_1+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)y$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $D^8(x^3$ ಸೈನ್$x) = P$ ಸೈನ್$x + Q$ ಕಾಸ್x ಆದರೆ, P ಮತ್ತು Q ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಟ್ಯಾನ್$\phi = \frac{1}{x}$ ಆದರೆ,

D^n ಟ್ಯಾನ್$^{-1}x = (-1)^{n-1}(n-1)!$ ಸೈನ್$^n\phi$ ಸೈನ್$n\phi$ ಎಂದು ಅನುಪ್ರೇರಣೆಯಿಂದ (induction), ಅಥವಾ ಇತರ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ.

11. $$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n-r} \text{ ಸೈನ್}\left(bx + c + \overline{n-r}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (a^2 + b^2)^{n/2} \text{ಸೈನ್}\left(bx + c + n \text{ ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $y =$ ಸೈನ್$nx +$ ಕಾಸ್nx ಆದರೆ,

$$y_r = n^r[1 + (-1)^r \text{ ಸೈನ್}2nx]^{\frac{1}{2}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $y =$ ಸೈನ್‌ಎಚ್ (mಸೈನ್‌ಎಚ್^{-1}x) ಆದರೆ,

$$(1 + x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $y = ($ಸೈನ್$^{-1}x)^2$ ಆದರೆ,

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $y = ($ಸೈನ್$^{-1}x)/\sqrt{(1-x^2)}$ ಆದರೆ,

$$(1 - x^2)y_1 = xy + 1,$$

ಮತ್ತು $(1 - x^2)y_{n+1} - (2n+1)xy_n - n^2y_{n-1} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $y = e^{a\ \text{ಸೈನ್}^{-1}x}$ ಆದರೆ,

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. ಟ್ಯಾನ್ ಲಾಗ್$_e y = x$ ಆದರೆ,

$$(1+x^2)y_{n+1} + (2nx-1)y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಕಾಸ್$^{-1}\left(\dfrac{y}{b}\right) =$ ಲಾಗ್$_e\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ ಆದರೆ,

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $y = [x + \sqrt{(1+x^2)}]^m$ ಆದರೆ,

$$(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0,$$

ಮತ್ತು $(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ ಆದರೆ,

$(x^2-1){y_1}^2 = m^2y^2$, $(x^2-1)y_2 + xy_1 = m^2y$,

ಮತ್ತು $(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. $y = \text{A}$ಕಾಸ್$\,nx + \text{B}$ಸೈನ್$\,nx + a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ ಆದರೆ, $y_{n+3} + n^2y_{n+1} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. $y = a$ ಕಾಸ್ ಲಾಗ್$\,x + b$ ಸೈನ್ ಲಾಗ್$\,x$ ಆದರೆ,

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0,$$

ಮತ್ತು $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. $u_n = D^n(x^{n-1}$ ಲಾಗ್$x)$ ಆದರೆ, $u_n = (n-1)u_{n-1}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಅದರಿಂದ $u_n = (n-1)!/x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

24. $u_n = D^n(x^n$ ಲಾಗ್$x)$ ಆದರೆ,

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಅದರಿಂದ

$$u_n = n!\left(\text{ಲಾಗ್}\,x + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ IV

ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗಳು

(mean value theorems)

4.1. ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿ (Rolle's theorem).

$a \leqslant x \leqslant b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, $a < x < b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, $f'(x)$ ಇದ್ದು, $f(a) = f(b)$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$f'(\xi) = 0, \; a < \xi < b,$$

ಆಗುವಂತೆ x ನಿಸ್ವಭಾವಿಗೆ $x = \xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $a \leqslant x \leqslant b$ ಎಂಬ ಆವೃತಾವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, $f(x)$ಗೆ M ಮತ್ತು m ಎಂಬ ಉತ್ ಮತ್ತು ಅಧೋ ಬಂಧನಗಳಿರುತ್ತವೆ ; ಮತ್ತು ಈ ಬಂಧನಗಳನ್ನು $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದುಸಲವಾದರೂ ಹೊಂದುತ್ತದೆ (§ 1.31).

ಒಂದು ಪಕ್ಷ, $M = m$ ಆದರೆ, ಆಗ ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ xನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ $f(x)$ನ ಬೆಲೆ M ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ xನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ $f'(x) = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ. xಗೆ $a < x < b$ ಆಗುವಂಥ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನಾದರೂ ξ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $M = m$ ಆದಾಗ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯು ಸಾಧನೆಯಾಯಿತು.

ಈಗ $M \neq m$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. $f(a) = f(b)$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, M ಮತ್ತು mಗಳ ಪೈಕಿ ಒಂದಾದರೂ

$f(a)$ ಅಥವಾ $f(b)$ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. $M = f(\xi) \neq f(a)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $a < \xi < b$ ಎಂಬುದು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ. $a < x < b$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಇದೆಯೆಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $f'(\xi)$ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ $f'(\xi) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

$$f'(\xi) = \underset{h \to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

h ವಿಸ್ತಭಾವಿಯು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗಲೂ, ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗಲೂ, ಈ ಪರಿಮಿತಿಗೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇರಬೇಕಷ್ಟೆ. ಈಗ M ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯು $f(x)$ನ ಉಚ್ಚಂಥನವಾದ್ದರಿಂದ h ನ ಬೆಲೆ ಏನಾದರೂ

$$f(\xi + h) - f(\xi) \leq 0.$$

$$\therefore \quad \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \quad h > 0,$$

ಮತ್ತು $$\frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geq 0, \quad h > 0.$$

$$\therefore \quad \underset{h \to 0+}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0,$$

ಮತ್ತು $$\underset{h \to 0-}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{h} \geq 0.$$

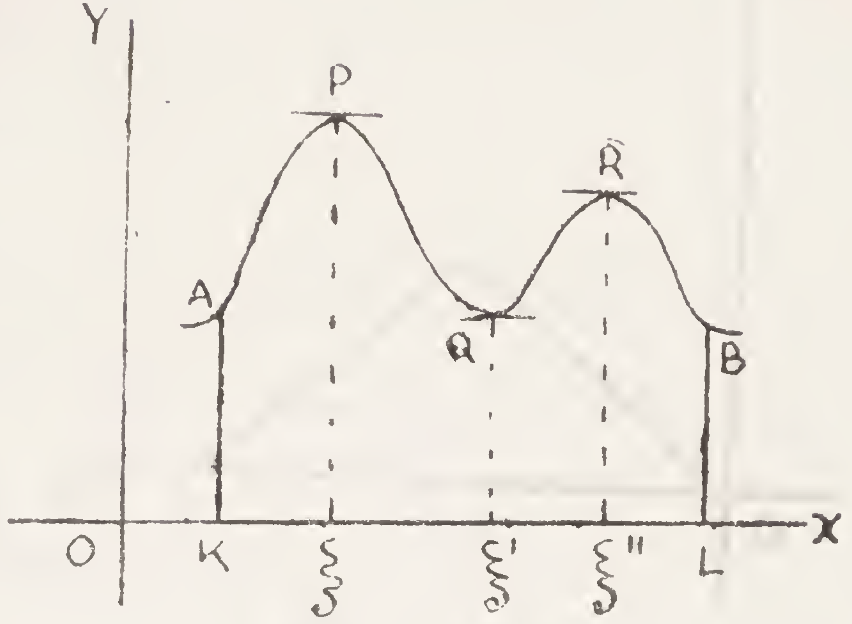
ಇವೆರಡು ಪರಿಮಿತಿಗಳಿಗೂ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇರಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆಯೇ ಆಗಬೇಕು. ಎಂದರೆ, $f'(\xi) = 0$.

$f(\xi) = m \neq f(a)$ ಅದಾಗಲೂ ಹೀಗೆಯೇ.

4.11. ರೇಖಾರ್ಥ ವಿವರಣೆ (geometrical interpretation).

$y = f(x)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, $a < x < b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದು

ವಿನಲ್ಲೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, KA, LB ಎಂಬ ಅಂತಿಮ ಲಂಬಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ (ಆಕೃತಿ 4 – 1), ಆಗ AB, ಎಂಬ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲದ P ಎಂಬ ಇನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಾದರೂ $f(x)$ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು OX ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಯೆಂಬುದೇ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ರೇಖಾರ್ಥ. P ಬಿಂದುವಿನ ಹಾಗೆಯೇ Q, R ಮುಂತಾದ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳೂ ಇರಬಹುದು. $f(x)$ ರೇಖೆಗೆ A, B ಎಂಬ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿರಬೇಕಾದ ಪ್ರಮೇಯವಿಲ್ಲ.



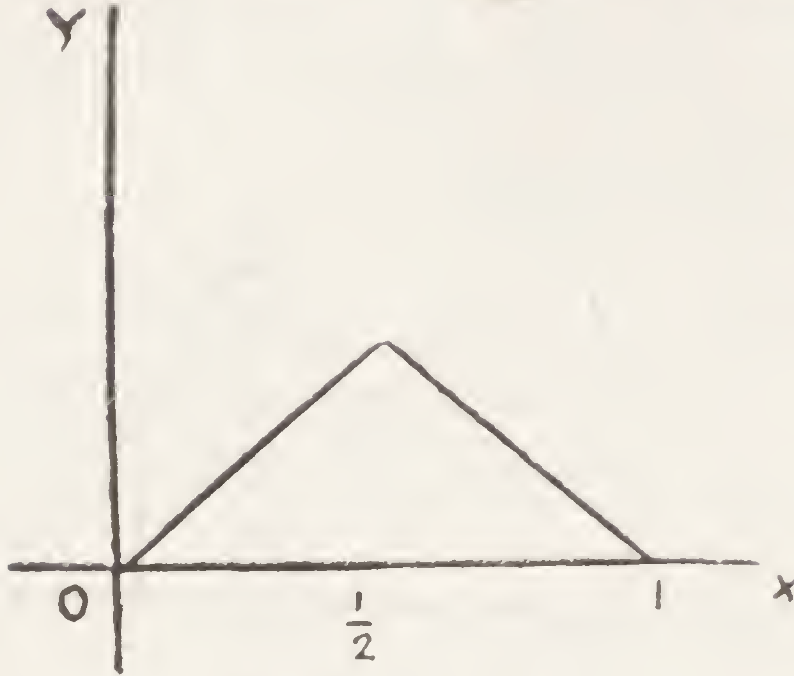
ಆಕೃತಿ 4 - 1

ಮೇಲಿನ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳು ಯಥಾಸಮೃದ್ಧವಾದುದೇ ಹೊರತು ಆವಶ್ಯಕವಾದುವಲ್ಲ (sufficient but not necessary). ಈ ಅಂಶವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆ 4ರಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y = x^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $(-1, 1)$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ξ ನ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ. ಆದರೆ $(1, 2)$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯು ಸಿದ್ಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, $f(1) \neq f(2)$. ಆಕೃತಿ 1 – 1 ನೋಡಿ.

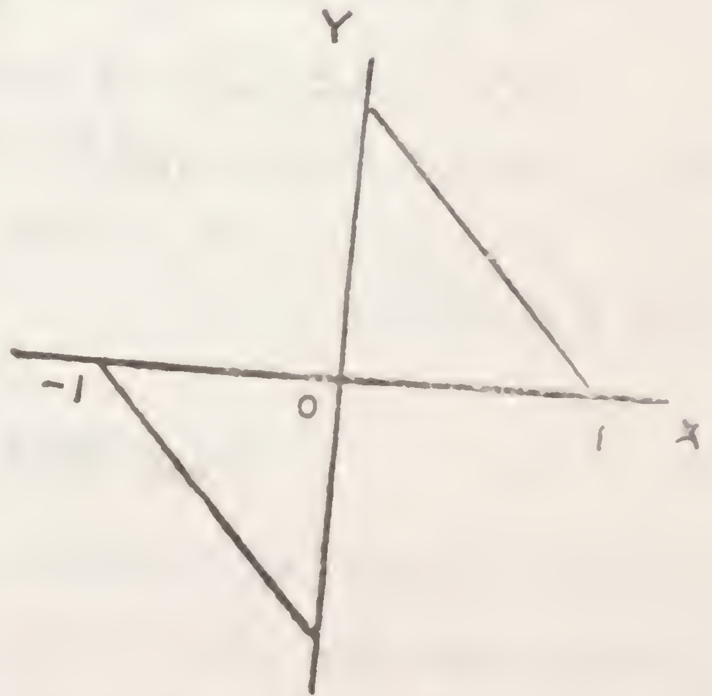
2. $0 \leqslant x \leqslant 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ ಆದಾಗ $f(x) = x$, $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ ಆದಾಗ $f(x) = 1 - x$ ಆದರೆ, x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ $f'(x)$ ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $x = \frac{1}{2}$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಇಲ್ಲ (ಆಕೃತಿ 4 – 2).



ಆಕೃತಿ 4 - 2

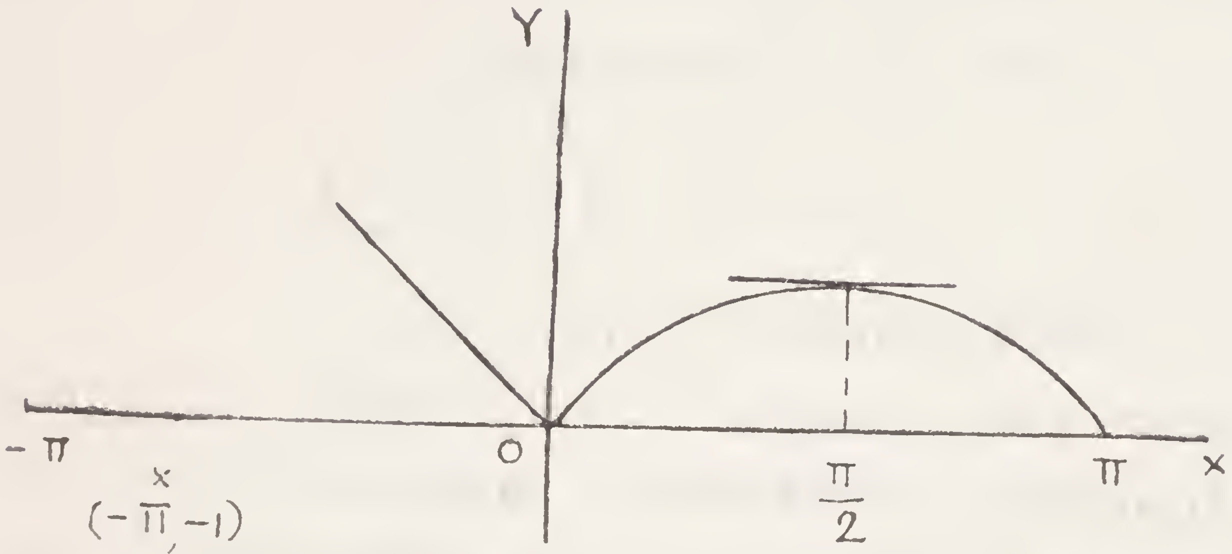
3. $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $-1 \leqslant x < 0$ ಆದಾಗ $f(x) = -x - 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ಆದಾಗ $f(x) = -x + 1$ ಆದರೆ, xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ $f'(x)$ ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. $x = 0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿಯಿದೆ. (ಆಕೃತಿ 4 – 3).

4. $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(-\pi) = -1$, $-\pi < x < 0$ ಆದಾಗ $f(x) = -x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ಆದಾಗ $f(x) =$ ಸೈನ್ x ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು (ಆಕೃತಿ 4 – 4) ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಯಾವ ನಿಯಮವನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ,



ಆಕೃತಿ 4 - 3

$x=-\pi$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿ ಇದೆ, $x=0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಇಲ್ಲ, ಮತ್ತು $f(-\pi)\neq f(\pi)$. ಆದರೂ $x=\pi/2$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $f'(x)$



ಆಕೃತಿ 4-4

ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ, ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳು ಯಥಾ ಸಮೃದ್ಧವಾದುವೇ ಹೊರತು ಅವಶ್ಯಕವಾದುವಲ್ಲ.

5. $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಹುಪದಿಯ (Polynomial) ಎರಡು ನಿಜ ಶೂನ್ಯಗಳ (ನಿಜ ಮೂಲಗಳ, real zeros, real roots) ನಡುವೆ $f'(x)$ ಗೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ನಿಜ ಶೂನ್ಯವಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇದು ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ.

4.2. ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿ–ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪ (the first mean value theorem–Lagrange's form).

$a\leq x\leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, $a<x<b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(\xi),\quad a<\xi<b, \qquad .... \quad \text{(i)}$$

ಆಗುವಂತೆ x ವಿಸ್ವಭಾವಿಗೆ $x=\xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $a\leqslant x\leqslant b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$$F(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{b-a}P, \qquad .... \quad (A)$$

ಸಂಗತ (where) $P=f(b)-f(a)$,

ಎಂಬ ಒಂದು ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು (auxiliary function) ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $a\leqslant x\leqslant b$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $f(x)$ ಗೆ ದತ್ತವಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದ $F(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $a\leqslant x\leqslant b$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ, $a<x<b$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $F'(x)$ ನ್ನು ಉಳ್ಳದ್ದಾಗಿದೆ, ಮತ್ತು (A) ಇಂದ $F(a)=F(b)(=0)$. ಆದ್ದರಿಂದ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಪ್ರಕಾರ

$$F'(\xi)=0,\quad a<\xi<b,$$

ಆಗುವಂತೆ $x=\xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ (A) ಯ ಅಂತರಣದಿಂದ

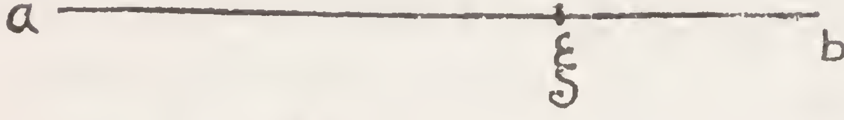
$$F'(x)=-f'(x)+\frac{P}{b-a}.$$

$$\therefore \qquad F'(\xi)=-f'(\xi)+\frac{P}{b-a}=0.$$

$$\therefore \qquad P=(b-a)f'(\xi).$$

ಎಂದರೆ, $f(b)=f(a)+(b-a)f'(\xi),\quad a<\xi<b.$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: $b-a=h$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ $b=a+h$ ಮತ್ತು $\xi=a+\theta h$, $0<\theta<1$ (ಆಕೃತಿ 4–5) ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ.



ಆಕೃತಿ 4-5

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),\ \ 0<\theta<1,$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಈ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳು ಯಥಾ ಸಮೃದ್ಧ ವಾದುವೇ ಹೊರತು ಆವಶ್ಯಕವಾದುವಲ್ಲ.

4.21. ರೇಖಾರ್ಥ ವಿವರಣೆ (geometrical interpretation).

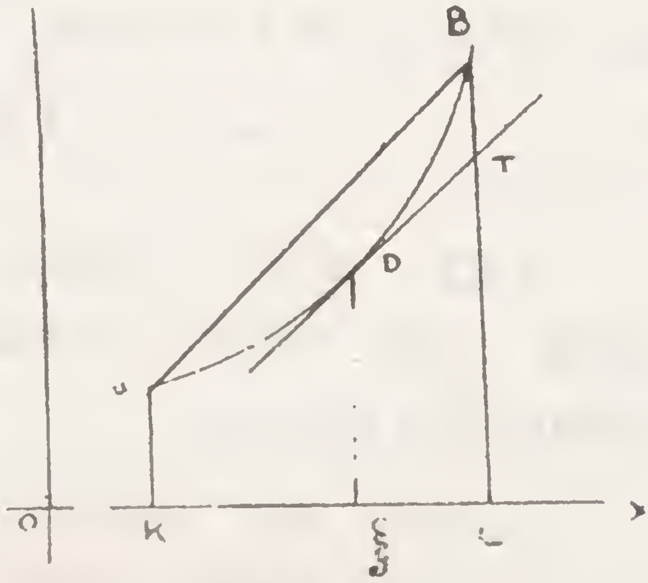
§4·2 ರ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ a<\xi<b \quad \ldots\ (ii)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಈಗ ಆಕೃತಿ 4–6 ರಲ್ಲಿ KA $=f(a)$, LB $=f(b)$; $\therefore$ CB $=f(b)-f(a)$, ಮತ್ತು AC = KL $=b-a$.

$\therefore$ (ii) ರಲ್ಲಿ ಎಡಭಾಗವು ಟ್ಯಾನ್ $\angle$CAB, ಎಂದರೆ AB ಛೇದಕದ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವಾಗುತ್ತದೆ,



ಆಕೃತಿ 4-6

ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗವು PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತ.

$\therefore$ AB $\parallel$ PT ಎಂದರೆ, $f(x)$ ರೇಖೆಯು ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಿದಾಗ, PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು A, B ಎಂಬ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ AB ಛೇದಕರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, A, B ಗಳಲ್ಲದ P ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$f(x)=x^2(x+1)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ (0, 1) ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ξ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳು A(0, 0), B(1, 2).

$\therefore$ AB ಛೇದಕದ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು 2.

ಇದು $f'(\xi)$ ಗೆ ಸಮವಾಗಬೇಕು.

$$\therefore \quad 3\xi^2+2\xi=2.$$

ದತ್ತ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಬೆಲೆ

$$\xi=(\sqrt{7}-1)/3$$

4.22. **ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿ – ಕೌಷೀ ರೂಪ (the first mean value theorem-Cauchy's form).**

$a\leq x\leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಮತ್ತು $\phi(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು $a<x<b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಮತ್ತು $\phi'(x)$ ಇದ್ದು, $\phi'(x)\neq 0$ ಆಗಿ,

$f'(x)$ ಮತ್ತು $\phi'(x)$ ಗಳು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಅನಂತವಾಗದಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)},\ a<\xi<b,$$

ಆಗುವಂತೆ x ವಿಸ್ವಭಾವಿಗೆ $x=\xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $\phi'(x)\neq 0$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\phi(b)\neq\phi(a)$; ಏಕೆಂದರೆ, $\phi(b)=\phi(a)$ ಆದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ $\phi'(\xi)=0,\ a<\xi<b$, ಆಗಲೇಬೇಕು. ಈಗ $a\leq x\leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$$F(x)=f(x)-A\phi(x),$$

ಸಂಗತ $$A=\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)},$$

ಎಂಬ ಒಂದು ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $F(a)=F(b)$ ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಹಾಗೂ, ದತ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದ $F(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಎಲ್ಲ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$F'(\xi)=0,\ a<\xi<b,$$

ಆಗುವಂತೆ x ಗೆ $x=\xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ,

$$f'(\xi)-A\phi'(\xi)=0,\ a<\xi<b,$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)},\ a<\xi<b.$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: (1) ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯು ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪದ ಪ್ರಕಾರ

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi_1),\ a<\xi_1<b,$$

ಮತ್ತು $\phi(b)-\phi(a)=(b-a)\phi'(\xi_2),\ a<\xi_2<b$;

ಭಾಗಹಾರದಿಂದ

$$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi_1)}{\phi'(\xi_2)},\quad a<\begin{matrix}\xi_1\\\xi_2\end{matrix}<b$$

ಆದರೆ ಕೌಷೀ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಅಂಶದಲ್ಲೂ ಛೇದದಲ್ಲೂ ξ ಗೆ ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(2) $b-a=h$ ಹಾಕಿ, ಕೌಷೀರೂಪದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\phi(a+h)-\phi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\phi'(a+\theta h)},\ 0<\theta<1$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(3) $\phi(x)=x$ ಹಾಕಿದರೆ, ಕೌಷೀರೂಪವು ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

§ 4·22 ರ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ

$$f(b)-f(a)=\xi\cdot f'(\xi)\ \text{ಲಾಗ್}\ (b/a),\ a<\xi<b,$$

ಆಗುವಂತೆ ξ ಗೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

§ 4·22 ರಲ್ಲಿ $\phi(x)=$ ಲಾಗ್ x ಹಾಕಿದರೆ ಈ ಫಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

4.23. ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಗಳು — ಲ'ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರ **(indeterminate forms—L'Hospital's rule).**

ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಗಳ ವಿಚಾರವನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ §1·56 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದೆ. ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಗಳು ಸಂಭವಿಸಿದಾಗ ಪರಿಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಲ'ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಎಂಬಾತನು ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಅದೇನೆಂದರೆ,

$f(x)$, $\phi(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು $(a-\eta, a)$ ಮತ್ತು $(a, a+\eta)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅವಧಿಗಳಲ್ಲೂ ಕಾಷೀ ರೂಪದ ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಒಳಪಟ್ಟಿದ್ದು, $x\to a$ ಆದಾಗ $f(x)\to 0$, $\phi(x)\to 0$ ಆಗಿ, $f'(x)/\phi'(x)$ ಗೆ ಒಂದು ಪರಿಮಿತಿ ಇರುವುದಾದರೆ, ಆಗ

$$\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{f(x)}{\phi(x)}=\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

ಸಾಧನೆ ; ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ದೆಸೆಯಿಂದ $f(a)=0=\phi(a)$. ಈಗ § 4·22 ರಿಂದ

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\phi(x)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$$

ಆಗುವಂತೆ a ಮತ್ತು xಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ξ ಇರುತ್ತದೆ. $x\to a$ ಆದಾಗ, $\xi\to a$ ಆದ್ದರಿಂದ ಲ' ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರವು ಸಾಧಿತ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : (1) ಈ ಸೂತ್ರವು 0/0 ಎಂಬ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. $f'(x)/\phi'(x)$ ಎಂಬ ಧಾರಣರಾಶಿಯು a ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 0/0 ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $x\to a$ ಆದಾಗ ಅದರ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು.

(2) $f(x)/\phi(x)$ ಎಂಬ ಧಾರಣರಾಶಿಯು a ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ∞/∞ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗಲೂ ಇದೇ ಸೂತ್ರವು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{1/\phi(x)}{1/f(x)},\quad\left[\frac{0}{0}\right],$$

$$=\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\left\{\frac{-\phi'(x)}{[\phi(x)]^2}\Big/\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}\right\}$$

$$=\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\left\{\left[\frac{f(x)}{\phi(x)}\right]^2\cdot\frac{\phi'(x)}{f'(x)}\right\}$$

$$=\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\left\{\left[\frac{f'(x)}{\phi'(x)}\right]^2\cdot\frac{\phi'(x)}{f'(x)}\right\}$$

$$=\underset{x\to a}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

(3) ಇತರ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪಗಳನ್ನು (§ 1·56), ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, 0/0 ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

(4) ಈ ಸೂತ್ರದ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳಿಗೆ A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ § 9·221, ಪುಟ 176 – 179 ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x\to 1$ ಆದಾಗ, $(2x^3-3x^2+1)/(3x^5-5x^3+2)$ ನ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x=1$ ಹಾಕಿದರೆ, ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು 0/0 ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ∴ ಲ' ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$$\underset{x\to 1}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^5-5x^3+2}=\underset{x\to 1}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\frac{6x^2-6x}{15x^4-15x^2}$$

ಇಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆ ಇರುವ ಧಾರಣರಾಶಿಯಲ್ಲಿ $x=1$ ಹಾಕಿದರೆ, ಅದೂ 0/0 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲ'ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಿಂದ ವಾಂಛಿತ ಪರಿಮಿತಿಯು

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 1} \frac{12x-6}{60x^3-30x}$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿಗೆ ಸಮ. ಇಲ್ಲಿ $x=1$ ಹಾಕಿ ; ಪರಿಮಿತಿಯ ಬೆಲೆ 1/5.

2. $\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 1} \dfrac{\text{ಕಾಸ್ ಎಚ್}\, x - 1 + \text{ಲಾಗ್}(1-x) + x}{x^3}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$x=0$ ಹಾಕಿದರೆ, ದತ್ತ ಧಾರಣರಾಶಿಯು 0/0 ಎಂಬ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲ'ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$$\text{ದತ್ತಪರಿಮಿತಿ} = \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{\text{ಸೈನ್ ಎಚ್}\, x - \dfrac{1}{1-x} + 1}{3x^2}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{bmatrix}$$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{\text{ಕಾಸ್ ಎಚ್}\, x - \dfrac{1}{(1-x)^2}}{6x}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{0} \end{bmatrix}$$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{\text{ಸೈನ್ ಎಚ್}\, x - \dfrac{2}{(1-x)^3}}{6}$$

$$= -\tfrac{1}{3}.$$

3. $x\to\infty$ ಆದಾಗ, (ಲಾಗ್ x)/x ನ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪವು ∞/∞. ಆದ್ದರಿಂದ ಲ'ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರವು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

$$\therefore \text{ ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to\infty} \frac{\text{ಲಾಗ್ } x}{x} = \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

4. $\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to\pi/2} [(\text{ಟ್ಯಾನ್}^2 x)\cdot(\text{ಲಾಗ್ಸೈನ್} x)], \quad [\infty\cdot 0]$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to\pi/2} \frac{\text{ಲಾಗ್ಸೈನ್} x}{\text{ಕಾಟ್}^2 x}, \qquad [0/0]$$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to\pi/2} \frac{\text{ಕಾಟ್} x}{-2\text{ಕಾಟ್} x \cdot \text{ಕೋಸೆಕ್}^2 x},$$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to\pi/2} \frac{-1}{2\text{ ಕೋಸೆಕ್}^2 x}$$

$$= -1/2.$$

5. $\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} (\text{ಕೋಸೆಕ್ } x - \text{ಕಾಟ್ } x), \qquad [\infty - \infty]$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{1-\text{ಕಾಸ್} x}{\text{ಸೈನ್} x}, \qquad [0/0]$$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{\text{ಸೈನ್ } x}{\text{ಕಾಸ್} x}$$

$$= 0.$$

6. $x\to\pi/2$ ಆದಾಗ, $(\text{ಸೈನ್} x)^{\text{ಟ್ಯಾನ್}^2 x}$ ನ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪವು 1^∞. ಈಗ

$$y = (\text{ಸೈನ್} x)^{\text{ಟ್ಯಾನ್}^2 x}$$

ಆದರೆ,

ಲಾಗ್ $y =$ ಟ್ಯಾನ್^{2}x ಲಾಗ್ ಸೈನ್ x.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ 4 ರಿಂದ, $x \to \pi/2$ ಆದಾಗ ಲಾಗ್ $y \to -\frac{1}{2}$.

$\therefore\ y \to e^{-1/2}$.

7. $x \to 0$ ಆದಾಗ, x^x ನ ಪರಿಮಿತಿ ಎಷ್ಟು ?

ಇಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪವು 0^0. ಈಗ $y = x^x$ ಆದರೆ, ಲಾಗ್ $y = x$ ಲಾಗ್ x.

$$\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ x\,\text{ಲಾಗ್}\,x = \underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{\text{ಲಾಗ್}\,x}{1/x}, \qquad \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= 0.$$

ಲಾಗ್ $y \to 0$. $\quad \therefore\ y \to e^0 = 1$.

8. $x \to 0$ ಆದಾಗ, $(\text{ಕಾಟ್}\,x)^{\text{ಸೈನ್}\,x}$ ನ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ ರೂಪವು ∞^0. ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು y ಎಂದು ಕರೆದರೆ,

ಲಾಗ್ $y =$ ಸೈನ್ $x \cdot$ ಲಾಗ್ ಕಾಟ್ x

ಈಗ, $$\underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \text{ಸೈನ್}\,x \cdot \text{ಲಾಗ್ ಕಾಟ್}\,x, \qquad [0 \cdot \infty]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{\text{ಲಾಗ್ ಕಾಟ್}\,x}{\text{ಕೋಸೆಕ್}\,x}, \qquad [\infty/\infty]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{(-\text{ಕೋಸೆಕ್}^2 x)/\text{ಕಾಟ್}\,x}{-\text{ಕೋಸೆಕ್}\,x \cdot \text{ಕಾಟ್}\,x}$$

$$= \text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{\text{ಸೈನ್}\, x}{\text{ಕಾಸ್}^2 x}$$

$$= 0.$$

ಲಾಗ್ $y \to 0$. $\quad \therefore \; y \to e^0 = 1$.

4·3. ದ್ವಿತೀಯ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿ—ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪ (the second mean value theorem—Lagrange's form).

$a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, $a < x < b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f''(x)$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(\xi), \quad a < \xi < b,$$

ಆಗುವಂತೆ x ವಿಸ್ವಭಾವಿಗೆ $x = \xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 P,$$

ಸಂಗತ $P = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)$,
ಎಂಬ ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $F(b) = F(a) (=0)$; $a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದುದರಿಂದ $f(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ (§2·12), $\therefore$ $F(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ; $a < x < b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f''(x)$ ಇರುವುದರಿಂದ $F'(x)$ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$F'(\xi) = 0, \quad a < \xi < b,$$

ಆಗುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ξ ಆದರೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ,

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - (b-x)f''(x) + \frac{2(b-x)}{(b-a)^2}P$$

$$\therefore\ F'(\xi) = (b-\xi)\left[-f''(\xi) + \frac{2P}{(b-a)^2}\right]$$

$$= 0.$$

ಆದರೆ, $a<\xi<b$; $\therefore\ b-\xi \neq 0$

$$\therefore \qquad P = \frac{(b-a)^2}{2}f''(\xi)$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ತೃತೀಯ, ಚತುರ್ಥ ಇತ್ಯಾದಿ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸಬಹುದು. ಈಗ n ನೆಯ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯನ್ನು ಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ. ಅದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟದ್ದು ಟೇಲರ್ (Taylor) ಎಂಬಾತನಿಂದ

4·4. ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿ (Taylor's theorem)

$a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f^{n-1}(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, $a<x<b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f^n(x)$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^n(\xi),$$

$$a<\xi<b \quad \ldots. \quad \text{(i)}$$

ಆಗುವಂತೆ x ವಿಸ್ವಭಾವಿಗೆ $x=\xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $a \leqslant x \leqslant b$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$$F(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)$$

$$-\dots-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x)-\frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}P,$$

ಸಂಗತ $$P=f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)$$

$$-\dots-\frac{(b-a)^{n-x}}{(n-1)!}f^{n-1}(a),$$

ಎಂಬ ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $F(b)=F(a)=0$. $a \leqslant x \leqslant b$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f^{n-1}(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ್ದರಿಂದ $f^{n-2}(x), f^{n-3}(x), \dots, f(x)$ ಎಲ್ಲವೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ; ಆದ್ದರಿಂದ $F(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ. $a<x<b$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f^n(x)$ ಇರುವುದರಿಂದ $F'(x)$ ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $F(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$F'(\xi)=0, \quad a<\xi<b,$$

ಆಗುವಂತೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ξ ಆದರೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಈಗ

$$F'(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(x)+\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}P.$$

$$\therefore\ F'(\xi)=(b-\xi)^{n-1}\left[\frac{-f^n(\xi)}{(n-1)!}+\frac{n}{(b-a)^n}P\right].$$

ಆದರೆ $a<\xi<b$; $\therefore\ b \neq \xi$.

$$\therefore \qquad P=\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(\xi).$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: (1). ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾದ $F(x)$ ನ್ನು ರಚಿಸುವ ವಿಧಾನ: ಸಮೀಕರಣ (i) ರಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆ ಕೊನೆಯ ಪದದ ಹೊರತು ಉಳಿದ ಎಲ್ಲ ಪದಗಳನ್ನೂ ಎಡಗಡೆಗೆ ವರ್ಗಾಯಿಸುವುದರಿಂದ P ದೊರೆಯುತ್ತದೆ; P ಯಲ್ಲಿ a ಗೆ ಬದಲು x ಹಾಕಿ, $-\frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}$ P ಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ $F(x)$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(2). $b-a=h$ ಹಾಕಿ, ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ \cdots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೊದಲನೆಯ n ಪದಗಳ ಆಚಿನ ಶೇಷ (remainder after the first n terms).

ವಿಸ್ತರಣೆ (expansion) (i) ರಲ್ಲಿ ಬಲಗಡೆ ಕೊನೆಯ ಪದಕ್ಕೆ, ಮೊದಲನೆಯ n ಪದಗಳ ಆಚಿನ ಶೇಷವೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ಶೇಷಕ್ಕೆ R_n ಎಂಬುದು ಸಂಕೇತ. ಹೀಗೆ

$$R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^n(\xi),\ a<\xi<b,$$

$$=\frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

ಇದು R_n ಎಂಬ ಶೇಷದ **ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪ.**

ಈ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಇತರ ರೂಪಗಳೂ ಇವೆ ಮೇಲಿನ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x) - \frac{(b-x)^p}{(b-a)^p}P,$$

$$(p \text{ ಪೂರ್ಣಾಂಕ}, n \geq p),$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\ p} f^n(a+\theta h), \ 0<\theta<1, \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.}$$

ಇದಕ್ಕೆ **ಸ್ಕ್ಲೋಮಿಲ್ಚ್ ರೋಷೀ** ರೂಪ (Schlomilch–Roche form) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದರಲ್ಲಿ $p = n$ ಹಾಕಿದರೆ ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $p = 1$ ಹಾಕುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h), \ 0<\theta<1,$$

ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ **ಕೌಷೀ ರೂಪ** (Cauchy's form) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಮತ್ತೆ $$R_n = \frac{h^n}{n!}E,$$

ಸಂಗತ $$h \to 0 \text{ ಆದಾಗ, } E \to f^n(a),$$

ಎಂಬುದು R_n ನ **ಯಂಗ್ ರೂಪ** (Young's form). $f^n(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ರೂಪವು ಲಗ್ರಾಂಜ್ R_n ಸಿಂದ ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ $f^n(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂಬ ಹೊಸ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಹಾಕದೆಯೇ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸುವುದು ನೋಡೋಣ :

$$\phi(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a),$$

ಮತ್ತು $$\psi(h) = \frac{h^n}{n!}$$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$$\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=\cdots=\phi^{n-1}(0)=0,$$

ಮತ್ತು $\psi(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\cdots=\psi^{n-1}(0)=0.$

ಅಲ್ಲದೆ,

$$\phi^{n-1}(h)=f^{n-1}(a+h)-f^{n-1}(a),$$

ಮತ್ತು $\psi^{n-1}(h)=h.$

$$\therefore \qquad \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{\phi^{n-1}(h)}{\psi^{n-1}(h)}=f^{n}(a).$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಲ'ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ

$$\underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}}\ \frac{\phi(h)}{\psi(h)}=f^{n}(a).$$

ಎಂದರೆ ಯಂಗ್ ರೂಪವು ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿತು.

ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆ (Maclaurin's expansion).

$f(a+h)$ ನ ಟೇಲರ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ h ಗೆ ಬದಲು x ನ್ನೂ, a ಗೆ ಬದಲು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನೂ ಹಾಕುವುದರಿಂದ ಲಭಿಸುವ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಶೇಷವನ್ನು ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ $f(x)$ ನ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯು

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(x-1)!}f^{n-1}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{n}(\theta x),\ 0<\theta<1,$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ h ಗೆ ಬದಲು x ನ್ನೂ, a ಗೆ ಬದಲು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನೂ ಹಾಕಿ, R_n ಎಂಬ ಶೇಷವನ್ನು ಇತರ ರೂಪಗಳಲ್ಲೂ ಬರೆಯುಬಹುದು.

$n \to \infty$ ಆದಾಗ $R_n \to 0$ ಆದರೆ, ಟೇಲರ್ ಮತ್ತು ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಅನಂತ ಪರ್ಯಂತ (to infinity) ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ದ್ವಿಪದಿ ಶ್ರೇಣಿ (the binomial series).

$f(x)=(1+x)^n$ ಆದರೆ, $f'(x)=n(1+x)^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$, ಇತ್ಯಾದಿ. $\therefore f(0)=1$, $f'(0)=n$, $f''(0)=n(n-1)$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots,\ |x|<1$$

$|x|<1$ ಆದಾಗ, $R_n \to 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. (A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ ಉದಾ. 4, ಪುಟ 186 ನೋಡಿ.) ಈ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ದ್ವಿಪದಿ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೆಸರು.

2. ಸೂಚಕ ಶ್ರೇಣಿ (the exponential series).

$f(x)=e^x$ ಆದರೆ, $f'(x)=f''(x)=\cdots=e^x$.

$$\therefore \quad f(0)=f'(0)=\cdots=1,$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರಕಾರ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $R_n \to 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು (A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ ಉದಾ. 1, ಪುಟ 185 ನೋಡಿ), ಈ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸೂಚಕ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೆಸರು.

3. ಲಘುಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ (the logarithmic series).

$f(x) =$ ಲಾಗ್$_e(1+x)$ ಆದರೆ, $f'(x) = 1/(1+x)$; $f''(x) = -1/(1+x)^2$, ಇತ್ಯಾದಿ. $\therefore f(0) = 0, f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, ಇತ್ಯಾದಿ. $\therefore$ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$\text{ಲಾಗ್}_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad -1 < x \leq 1.$$

$-1 < x \leq 1$ ಆದಾಗ, $R_n \to 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. (A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ ಉದಾ. 3, ಪುಟ 186 ನೋಡಿ.) ಈ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಲಘುಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೆಸರು.

4. ಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿ (the sine series).

$f(x) =$ ಸೈನ್$\,x$ ಆದರೆ, $f'(x) =$ ಕಾಸ್$\,x$, $f''(x) =$ $-$ಸೈನ್$\,x$, $f'''(x) = -$ ಕಾಸ್$\,x$, $f^4(x) =$ ಸೈನ್$\,x$, ಇತ್ಯಾದಿ. $\therefore f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^4(0) = 0$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪ್ರಕಾರ

$$\text{ಸೈನ್}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

ಇಲ್ಲಿ x ಕೋನವು ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿ ಮಾನದಲ್ಲಿದೆ (radian measure). $R_n \to 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. (A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ ಉದಾ. 1, ಪುಟ 185 ನೋಡಿ). ಈ ಶ್ರೇಣಿಗೆ ಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೆಸರು.

5. **ಕೋಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿ (the cosine series).**
ಮೇಲಿನಂತೆ,

$$\text{ಕಾಸ್ } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

ಇದಕ್ಕೆ ಕೋಸೈನ್ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಹೆಸರು.

6. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಕ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ (ಮೇಲಿನ ಉದಾ. 2), ಅಥವಾ ನೇರವಾಗಿ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\text{ಸೈನ್ ಎಚ್ } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

$$\text{ಕಾಸ್ ಎಚ್ } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

7. $$\text{ಸೈನ್ } (m \text{ ಸೈನ್}^{-1} x) = mx - \frac{m(m^2 - 1^2)}{3!} x^3 + \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{5!} x^5 - \cdots$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$f(x) = \text{ಸೈನ್}(m\text{ಸೈನ್}^{-1}x)$ ಆದರೆ, ಉದಾ. 4, § 3 4 ರಿಂದ $(1-x^2)f^{n+2}(x)-(2n+1)xf^{n+1}(x)+(m^2-n^2)f^n(x)=0$. ಇದರಲ್ಲಿ $x=0$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$f^{n+2}(0) = -(m^2 - n^2) f^n(0) \qquad \ldots . \quad \text{(i)}$$

ಆದರೆ, $f(0)=0$, $f'(0)=m$, ಮತ್ತು $f''(0)=0$.

$\therefore$ (i) ರಲ್ಲಿ $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$ ಹಾಕಿದರೆ, $f^{2n}(0) = 0$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ; ಮತ್ತೆ $n=1$ ಹಾಕಿದರೆ $f^3(0) =$

$-(m^2-1^2)m$, $n=3$ ಹಾಕಿದರೆ, $f^5(0) = (m^2-1^2)(m^2-3^2)m$, ಇತ್ಯಾದಿ. ಈಗ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ ವಾಂಛಿತ ಫಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : $x=$ ಸೈನ್ θ ಹಾಕಿದರೆ, ಸೈನ್ $m\theta$ ದ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಸೈನ್ θ ದ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

8. $|x|<|$ ಆದಾಗ, $f(x)=1/(1-x)$ ನ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ n ಪದಗಳ ಆಚಿನ ಶೇಷವನ್ನು

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\ f^n(\theta x),\quad 0<\theta<1,$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಆಗ

$$\theta = \frac{1}{x}\left[1-(1-x)^{\frac{1}{n+1}}\right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n(1+x+x^2+\cdots)$$

$$= 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}.$$

$$\therefore \qquad \frac{x^n}{n!}\cdot f^n(\theta x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{n!}{(1-\theta x)^{n+1}} = \frac{x^n}{1-x}.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ θ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

9. m ಮತ್ತು n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು $m<n$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$D^{n-m}(x^2-1)^n = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}(x^2-1)^m D^{n+m}(x^2-1)^n$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (Rodrigue).

$f(x)=(x^2-1)^n$, $u=x^2-1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots.$$

$$\therefore\ [(x+\lambda)^2-1]^n=\Big(u^n+\lambda Du^n+\frac{\lambda^2}{2!}D^2u^n+\cdots$$

$$+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}u^n\Big)$$

$$+\Big(\frac{\lambda^n}{n!}D^nu^n\Big)+\Big(\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}D^{n+1}u^n+\cdots+\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}D^{2n}u^n\Big)$$

$$\therefore\ \left[\frac{(x+\lambda)^2-1}{\lambda}\right]^n=\frac{1}{n!}D^nu^n+\Big[\frac{\lambda}{(n+1)!}D^{n+1}u^n+\cdots$$

$$+\frac{\lambda^n}{(n+n)!}D^{2n}u^n\Big]$$

$$+\Big[\frac{\lambda-1}{(n-1)!}D^{n-1}u^n+\cdots+\frac{\lambda-^n}{(n-n)!}D^{n-n}u^n\Big]$$

$$\therefore\ \left[\frac{u+2\lambda x+\lambda^2}{\lambda}\right]^n=\frac{1}{n!}D^nu^n$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^m}{(n+m)!}D^{n+m}u^n$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^{-m}}{(n-m)!}D^{n-m}u^n.$$

ಇದರಲ್ಲಿ λ ಗೆ ಬದಲು u/λ ಹಾಕಿದರೆ ಎಡಭಾಗವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\left[\frac{u+2\lambda x+\lambda^2}{\lambda}\right]^n = \frac{1}{n!}D^n u^n$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(u/\lambda)^m}{(n+m)!}D^{n+m}u^n$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(n/\lambda)^{-m}}{(n-m)!}D^{n-m}u^n.$$

ಕೊನೆಯ ಈ ಎರಡು ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ λ^{-m} ನ ಸಹವರ್ತನಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ ವಾಂಛಿತ ಫಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4

1. $0\leqslant x\leqslant 2$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)=x(x-1)(x-2)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ, $f'(\xi)=0$, $0<\xi<2$, ಆಗುವಂಥ ξ ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $-1\leqslant x\leqslant 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$-1\leqslant x<0$ ಆದಾಗ $f(x)=-x$,

ಮತ್ತು $0\leqslant x\leqslant 1$ ಆದಾಗ $f(x)=x$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ $f'(x)$ ಶೂನ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣವೇನು ? ನಕ್ಷೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿವರಿಸಿ.

3. ಲಾಗ್ x ರೇಖಿಗೆ ರೋಲ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯು ಯಾವ ಅವಧಿಯಲ್ಲೂ ಸಿದ್ಧಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆ ?

4. $y=x^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $(-1, 1)$ ಮತ್ತು $(3, 9)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $y=x^3$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ, ತದನುಗುಣವಾದ ξ ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಒಂದು ನಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿ.

6 $f(x)=x^3-3x^2+x+3$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $0 \leqslant x \leqslant 2$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗೆ ಹೊಂದುವ ξ ನ ಬೆಲೆಗಳಾವುವು ?

7. $x>1$ ಆದರೆ, $(1, x)$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

$$n(x^{1/n}-1)=(\text{ಲಾಗ್}^e x)\,\xi^{1/n}$$

ಆಗುವಂತೆ ξ ಗೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ,

ಪರಿಮಿತಿ $n(x^{1/n}-1)=\text{ಲಾಗ್}^e x,\ x>1$. ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
$n\to\infty$

[ಸೂಚನೆ: ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಕಾಷೀ ರೂಪದಲ್ಲಿ $f(x)=x^{1/n}$, $\phi(x)=\text{ಲಾಗ್}^e x$, $a=1$ ಮತ್ತು $b=x$ ಹಾಕಿ.]

8. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಿತಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $\dfrac{x^4+x^3-3x^2-5x-2}{x^4+2x^3-2x-1},\ x\to -1;$

ii) $(\text{ಟ್ಯಾನ್ } x-\text{ ಸೈನ್ } x)/x^3,\ x\to 0;$

iii) $[$ಲಾಗ್$(1-x^2)]/[$ಲಾಗ್ ಕಾಸ್$x]$, $x\to 0$;

iv) $x^{1/2}$ ಟ್ಯಾನ್$x/(e^x-1)^{3/2}$. $x\to 0$;

v) (ಕಾಸ್ ಎಚ್$x+\frac{1}{2}$ ಸೈನ್$^2 x$
+ ಲಾಗ್$(1+x)-1-x-\frac{1}{2}x^2)/x^3$, $x\to 0$;

vi) $[x-(n+1)x^{n-1}+nx^{n+2}]/(1-x)^2$, $x\to 1$;

vii) $(e^x-e^{-x}+2$ಸೈನ್$x-4x)/x^5$, $x\to 0$;

viii) $\frac{1}{x}-$ ಕಾಟ್x, $x\to 0$;

ix) $(1-$ ಟ್ಯಾನ್$x)/(1-\sqrt{2}$ ಸೈನ್$x)$, $x\to\pi/4$;

x) $x^{1/x}$, $x\to\infty$;

xi) $[(ax+1)/(ax-1)]^x$, $x\to\infty$;

xii) (ಕಾಸ್$x)^{\text{ಕಾಟ್}^2 x}$, $x\to 0$.

9. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಪರಿಮಿತಿಯು $x\to 0$ ಆದಾಗ 1 ಎಂದೂ, $x\to\infty$ ಆದಾಗ e ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

10. $e^{x\text{ಸೆಕ್}x}$ ನ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳನ್ನು x^4 ವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) $e^{\text{ಸೈನ್}x}$; ii) ಲಾಗ್(1+ ಕಾಸ್x).

12. ಲಾಗ್ ಕಾಸ್x ನ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ x^4 ನ ಸಹವರ್ತನವೆಷ್ಟು ?

13. ಕಾಸ್ (m ಸೈನ್^{-1}x) ನ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು,

$$\text{ಕಾಸ್ } m\theta = 1 - \frac{m^2}{2!}\text{ಸೈನ್}^2\theta + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\text{ಸೈನ್}^4\theta - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\text{ಸೈನ್}^6\theta + \cdots$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯಿಂದ

$$\text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \; -1 < x \leq 1,$$

ಎಂಬ ಗ್ರಿಗರಿ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು (Gregory's series) ಪಡೆಯಿರಿ.

15. $|x| < 1$ ಆದಾಗ, $1/(1+x)$ ನ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ n ಪದಗಳ ಆಚಿನ ಶೇಷವನ್ನು $\frac{x^n}{n!}f^n(\theta x)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$$\theta - \frac{1}{x}\left[(1+x)^{\frac{1}{n+1}} - 1\right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ

$$\begin{vmatrix} f(a), & f(b) \\ \phi(a), & \phi(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a), & f'(\xi) \\ \phi(a), & \phi'(\xi) \end{vmatrix}, \quad a < \xi < b,$$

ಆಗುವಂತೆ x ಗೆ $x = \xi$ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಸೂಚನೆ : ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a), & f(x) \\ \phi(a), & \phi(x) \end{vmatrix} - \frac{x-a}{b-a}\begin{vmatrix} f(a), & f(b) \\ \phi(a), & \phi(b) \end{vmatrix}$$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.]

17. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ

$$\begin{vmatrix} f(a), & f(b), & f'(\xi) \\ \phi(a), & \phi(b), & \phi'(\xi) \\ \psi(a), & \psi(b), & \psi'(\xi) \end{vmatrix} = 0, \; a<\xi<b,$$

ಆಗುವಂತೆ ξ ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಸೂಚನೆ : ಸಹಾಯಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(a), & f(b), & f(x) \\ \phi(a), & \phi(b), & \phi(x) \\ \psi(a), & \psi(b), & \psi(x) \end{vmatrix}$$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.]

18. ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $\psi(x)=k(\neq 0)$ ಹಾಕಿದರೆ, ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಕೌಷೀ ರೂಪವು ಲಭಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ ; ಹಾಗೆಯೇ $\psi(x)=k(\neq 0)$ ಮತ್ತು $\phi(x)=x$ ಹಾಕಿದರೆ, ಲಗ್ರಾಂಜ್ ರೂಪವು ಲಭಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ V

ಪಾಕ್ಷಿಕ ಅಂತರಣ

(partial differentiation)

5.1. ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (functions of two independent variables).

x ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಅಧ್ಯಾಯ I ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ, ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಮತ್ತು ಪರಿಮಿತಿಗಳ ನಿರೂಪಣೆಗಳನ್ನು ಈಗ x, y ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳಿಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ.

ಒಂದು ದತ್ತ x-y ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ (domain), (x, y) ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ದತ್ತನಿಯಮ ಅಥವಾ ನಿಯಮಗಳ ಮೂಲಕ z ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಮೂಲ್ಯ ಅಥವಾ ಮೂಲ್ಯಗಳು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದರೆ, ಆಗ z ಎಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು x. y ಎಂಬ ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಒಂದು **ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು** ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ

$$z = f(x, y)$$

ಎಂಬುದು ಸಂಕೇತ. ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ತ್ರಿಮಾನಿತ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ (three-dimensional space) ಒಂದು ಮುಖಸ್ಥಲವನ್ನು (surface) ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ (represents). ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಏಕಮೂಲ್ಯವಾದುವು (single-valued).

ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದೇ ಆಗಿರಲಿ, η ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು,

$$a-\eta \leqslant x \leqslant a+\eta, \text{ ಮತ್ತು } b-\eta \leqslant y \leqslant b+\eta$$

ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ [ಎಂದರೆ, (x, y) ಬಿಂದುವು $x=a\pm\eta$, $y=b\pm\eta$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆದ ಚೌಕದಲ್ಲಿದ್ದಾಗಲೆಲ್ಲ.]

$$| f(x, y)-f(a, b) | < \epsilon$$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ $f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು (a, b) ಎಂಬ **ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ**ವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಒಂದು ದತ್ತ x-y ಕ್ಷೇತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅದು ಆ **ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ**ವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಹೇಳಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ϵ ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದತ್ತ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ϵ ಎಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದೇ ಆಗಿರಲಿ, η ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು,

$$0 < | x-a | < \eta \text{ ಮತ್ತು } 0 < | x-b | < \eta$$

ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ [ಎಂದರೆ, (x, y) ಬಿಂದು $x=a\pm\eta$, $y=b\pm\eta$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆದ ಚೌಕದಲ್ಲಿ (a, b) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಲ್ಲದ ಮತ್ತೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೂ]

$$| f(x, y)-l | < \epsilon$$

ಆಗುವಂತೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆಗ

$$\underset{(x, y)\to(a, b)}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \quad f(x, y)=l$$

ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಗಳನ್ನು n ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

5.2. ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳು (partial derivatives).

$f(x, y)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ, (x, y) ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ,

$$\underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h} \quad .... \quad (i)$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿ ಇರುವುದಾದರೆ, ಈ ಪರಿಮಿತಿಗೆ (x, y) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ **x–ಗೌರವದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯ** (partial derivative w.r.t. x) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಹಾಗೆಯೇ

$$\underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k} \quad .... \quad (ii)$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿ ಇರುವುದಾದರೆ. ಈ ಪರಿಮಿತಿಗೆ (x, y) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ **y–ಗೌರವದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

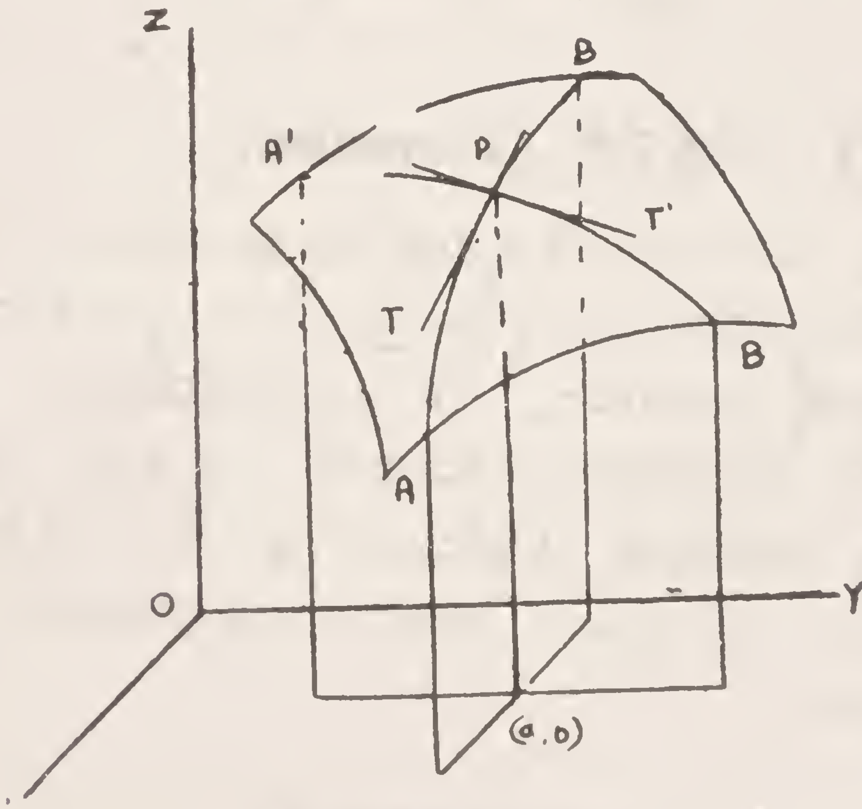
x– ಮತ್ತು y– ಗೌರವದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, ಅಥವಾ $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ ಎಂದು ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. (x, y) ಬಿಂದುವು ಅಧ್ಯಾಹಾರವಾದಾಗ ಇವುಗಳನ್ನು $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ ಅಥವಾ f_x, f_y ಎಂದು ಹ್ರಸ್ವೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ (i) ರಲ್ಲಿ y ಯನ್ನು ಸ್ಥಿರಿಯಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\partial f/\partial x$ ನ್ನು ಪಡೆಯಲು $f(x, y)$ ಯಲ್ಲಿ y ಯನ್ನು ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದೂ, x ನ್ನು ವಿಸ್ವಭಾವಿಯೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ, x ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಬೇಕು. ಆ ಬದಲು, x ನ್ನು ಸ್ಥಿರಿಯಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು y ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ $\partial f/\partial y$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆಂದು (ii) ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ.

$f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಒಂದು ದತ್ತ $x-y$ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ $f_x(x, y)$ ಎಂಬ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಆ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ $f_x(x, y)$ ಎಂಬುದೊಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. $f_y(x, y)$ ಯೂ ಹೀಗೆಯೇ.

5.21. ರೇಖಾರ್ಥವಿವರಣೆ (geometrical interpretation).

$z = f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಿಂದ ರೂಪಿತವಾದ ಮುಖ ಸ್ಥಲವನ್ನು (surface) S ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ (ಆಕೃತಿ 5-1).



ಆಕೃತಿ 5-1

ಈ ಮುಖಸ್ಥಲದಲ್ಲಿ $P[a, b, f(a, b)]$ ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $y = b$ ಎಂಬ ಸಮತಲವು (plane) S ಎಂಬ ಮುಖಸ್ಥಲವನ್ನು APB ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ APB ಎಂಬ ಸಮತಲರೇಖೆಗೆ (plane curve) P ಎಂಬಲ್ಲಿ PT

ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು OX ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ψ ಕೋನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $x = a$ ಎಂಬ ಸಮತಲವು s ಎಂಬ ಮುಖಸ್ಥಲವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ A′PB′ ಎಂಬ ಸಮತಲ ರೇಖೆಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ PT′ ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು OY ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ θ ಕೋನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\theta.$$

5.22. ವಿಸ್ತರಣೆ (extension).

x, y, z ಎಂಬ ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ $u = f(x, y, z)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು, y ಮತ್ತು z ಗಳು ಸ್ಥಿರಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸಿ x ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ, $\partial f/\partial x$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ ಗಳ ನಿರೂಪಣೆಯೂ ಇದೇರೀತಿ. ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆದಾಗಲೂ ಹೀಗೆಯೇ : $(n-1)$ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಉಳಿದ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$ ಆದರೆ, $f_x(1, 1)$ ಮತ್ತು $f_y(1, 1)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f_x(x, y) = 6x - 4y\,; \quad f_y(x, y) = -4x + 10y.$$

$$\therefore \quad f_x(1, 1) = 2, \text{ ಮತ್ತು } f_y(1, 1) = 6.$$

2. $u = yz + zx + xy +$ ಸೈನ್ (xyz) ಆದರೆ, ಆಗ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z + y + yz \text{ ಕಾಸ್}(xyz);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z + x + zx \text{ ಕಾಸ್}(xyz);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y + x + xy \text{ ಕಾಸ್}(xyz).$$

5.3. ಅನುಕ್ರಮ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಅಂತರಣ (successive partial differentiation).

$f(x, y)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ x ಅಥವಾ y ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಆಗ $f(x, y)$ ನ ಎರಡನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅವುಗಳ ಸಂಕೇತ ಈ ರೀತಿ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ f_{xx}, f_{yx}, f_{xy} ಮತ್ತು f_{yy} ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ f_{yx} ಮತ್ತು f_{xy}ಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಇವು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿರುವಂಥ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳೂ ಇವೆ. (A.F.R.V. ಯಲ್ಲಿ § 10·25, ಪುಟ 196 ನೋಡಿ.)

f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} ಮತ್ತು f_{yy} ಎಂಬ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ p, q, r, s, t ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸಂಕೇತಿಸುವುದೂ ಉಂಟು.

ಎರಡನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಮತ್ತೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

ಮುಂತಾದ ಸಂಕೇತಗಳು ಸುಲಭ ಗ್ರಾಹ್ಯವಾಗಿವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಪುನರಂತರಣವು ಎಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 8\,;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0\,;$$ ಇತ್ಯಾದಿ.

2. $z =$ ಸೈನ್(xy) ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \text{ ಕಾಸ್}(xy)\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \text{ ಕಾಸ್}(xy)\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \text{ಕಾಸ್}(xy) - xy \text{ ಸೈನ್}(xy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

3. $u = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^3 + z^2)}}$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\left[1 - \frac{3x^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right];$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2))^{3/2}}\left[3 - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}\right] = 0.$$

5.4. ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು (homogeneous functions).

$f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು t ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \qquad \text{.... (i)}$$

ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(x, y)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು n ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

n ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$x^n\phi(y/x),\ y^n\psi(x/y) \qquad \text{.... (ii)}$$

ಎಂಬ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಹೇಗೆಂದರೆ :

(i) ರಲ್ಲಿ $tx = x'$, $ty = y'$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$f(x', y') = t^n f\left(\frac{x'}{t}, \frac{y'}{t}\right) \quad .... \quad \text{(iii)}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ t ಗೆ x'/x ಹಾಕಿದರೆ,

$$f(x', y') = \left(\frac{x'}{x}\right)^n f\left(x, \frac{y'}{x'} x\right)$$

$$= \left(\frac{x'}{x}\right)^n \cdot x^n f\left(1, \frac{y'}{x'}\right)$$

$$= x'^n \phi\left(\frac{y'}{x'}\right)$$

ಮತ್ತೆ (iii) ರಲ್ಲಿ t ಗೆ y'/y ಹಾಕಿದರೆ, ಮೇಲಿನಂತೆ

$$f(x', y') = y'^n \psi\left(\frac{x'}{y'}\right).$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $f(x, y, z, \ldots)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು t ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots)$$

ಆಗುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(x, y, z, \ldots)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು n ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅಂಥ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$x^n \phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right), \quad y^n \psi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \ldots\right),$$

ಮುಂತಾದ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3$ ಆದರೆ,

$$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $f(x, y)$ ಯು 3ನೆಯ ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ. ಇದನ್ನು

$$f(x, y) = x^3\left[1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^3\right] = x^3\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ ಇದನ್ನು $y^3\psi(x/y)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

2. $f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots. + a_ny^n$ ಎಂಬುದೊಂದು n ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ.

3. $$f(x, y) = \frac{x+y}{x\sqrt{x}}$$

ಆದರೆ, $$f(tx, ty) = t^{-\frac{1}{2}} f(x, y).$$

ಆದ್ದರಿಂದ $f(x, y)$ ಯು $-\frac{1}{2}$ ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ.

ಇದನ್ನು $x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{y}{x}\right)$; $y^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$

ಎಂಬ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

4. x (ಲಾಗ್ y − ಲಾಗ್ x) ಎಂಬುದೊಂದು ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $(x+y)/(x-y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಶೂನ್ಯ ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.41. ಆಯಿಲರನ ಸಂಸಿದ್ಧಿ (Euler's theorem).

$f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು n ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾದರೆ, ಆಗ

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

ಸಾಧನೆ (1) : $f(xt,\ yt)=t^n f(x, y)$.

$xt=x',\ \ yt=y'$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$$f(x',\ y')=t^n f\ (x,\ y).$$

ಇದನ್ನು t ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\partial f(x', y')}{\partial x'}x+\frac{\partial f(x', y')}{\partial y'}y=nt^{n-1} f(x,\ y).$$

ಇದರಲ್ಲಿ $t=1$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}x+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}y=nf(x,\ y).$$

ಸಾಧನೆ (2) : $f(x, y)=x^n\phi(y/x)$.

$$\therefore\quad \frac{\partial f}{\partial x}=nx^{n-1}\phi(y/x)+x^n\phi'(y/x)\cdot(-y/x^2)$$

$$=nx^{n-1}\phi(y/x)-x^{n-2}y\phi'(y/x).$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial f}{\partial x}=nx^n\phi(y/x)-x^{n-1}y\phi'(y/x) \quad \ldots\ \text{(i)}$$

ಮತ್ತೆ $\frac{\partial f}{\partial y}=x^n\phi'(y/x)(1/x)=x^{n-1}\phi'(y/x)$

$$\therefore\quad y\frac{\partial f}{\partial y}=x^{n-1}y\ \phi'(y/x) \quad \ldots\ \text{(ii)}$$

(i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nx^n\phi(y/x)=nf(x,\ y).$$

ಉಪಲಬ್ಧ : $f(x,y)$ ಯು n ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿದ್ದು $f_{xy}=f_{yx}$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f.$$

ಹೇಗೆಂದರೆ, ಮೇಲೆ ಲಬ್ಧವಾದ

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=n\frac{\partial f}{\partial x},$$

ಮತ್ತು $$x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n\frac{\partial f}{\partial y}.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದನ್ನು x ನಿಂದಲೂ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು y ನಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, ಕೂಡಿದರೆ,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$=n(n-1)f(x,\ y).$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗಲೂ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯ ಫಲಗಳು ಸಿದ್ಧಿಸುತ್ತವೆ

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ ಆದರೆ,

$$xf_x + yf_y = 3f,$$

ಮತ್ತು $$x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy} = 6f$$

ಎಂದು ಆಯಿಲರನ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದಲೂ, ಮತ್ತು ನೇರವಾಗಿ ಪಾರ್ಶ್ವಿಕ ಅಂತರಣದಿಂದಲೂ ತೋರಿಸಿ.

2. $$u = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\frac{x^3 - y^3}{x + y}$$

ಆದರೆ,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \text{ಸೈನ್ } 2u$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಸಮಘಾತೀಯವಾದುದಲ್ಲ. ಆದರೆ

$$f(x, y) = \text{ಟ್ಯಾನ್ } u = (x^3 - y^3)/(x + y)$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಸಮಘಾತೀಯವಾದುದು ಮತ್ತು ಇದರ ಘಾತ 2. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಯಿಲರನ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಪ್ರಕಾರ

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f = 2 \text{ ಟ್ಯಾನ್ } u.$$

ಈಗ $$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{ಸೆಕ್}^2 u\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ ಮತ್ತು } \frac{\partial f}{\partial y} = \text{ಸೆಕ್}^2 u\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\therefore \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\text{ಸೆಕ್}^2 u$$

ಎಂದರೆ, $$2 \text{ ಟ್ಯಾನ್ } u = \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\text{ಸೆಕ್}^2 u$$

$$\therefore \qquad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\text{ಸೈನ್ } 2u.$$

ಈ ಫಲವನ್ನು ನೇರವಾದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಅಂತರಣದಿಂದಲೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

5.5. ಸಂಕಲಿತ ಅಂತರಾಂಶ (total differential).

$$z=f(x,\ y)$$

ಆದರೆ, $$z+\delta z=f(x+\delta x,\ y+\delta y).$$

$$\therefore\ \delta z=f(x+\delta x,\ y+\delta y)-f(x,\ y)$$

$$=[f(x+\delta x,\ y+\delta y)-f(x,\ y+\delta y)]$$

$$+[f(x,\ y+\delta y)-f(x,\ y)]$$

$$=\delta x\cdot f_x(x+\theta_1\delta x,\ y+\delta y)+\delta y\cdot f_y(x,y+\theta_2\delta y),$$

$$0<\begin{matrix}\theta_1\\ \theta_2\end{matrix}<1,$$

(ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ § 4.2)

$$=\delta x[f_x(x,\ y)+\epsilon_1]+\delta y[f_y(x,\ y)+\epsilon_2]$$

($\delta x\to 0$ ಮತ್ತು $\delta y\to 0$ ಆದಾಗ $\epsilon_1\to 0$, $\epsilon_2\to 0$: f_x, fy ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ್ದರಿಂದ)

$$=(f_x\delta x+f_y\delta y)+(\epsilon_1\delta x+\epsilon_2\delta y) \qquad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

ಹೀಗೆ δz ಎಂಬ ವರ್ಧನವು $(f_x\delta x+f_y\delta y)$ ಮತ್ತು $(\epsilon_1\delta x+\epsilon_2\delta y)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ಈ ಪೈಕಿ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗವು δz ನ ಮುಖ್ಯಭಾಗ (principal part) ; ಇದಕ್ಕೆ zನ **ಸಂಕಲಿತ ಅಂತರಾಂಶ** (total differential) ಎಂದು ಹೆಸರು, ಮತ್ತು dz ಎಂಬುದು ಸಂಕೇತ. ಹೇಗೆ, z ನ ಸಂಕಲಿತ ಅಂತರಾಂಶ ವೆಂದರೆ,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad \ldots. \quad \text{(ii)}$$

ಈಗ $z=f(x, y)$, $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. (i) ರಿಂದ

$$\frac{\delta z}{\delta t} = f_x \frac{\delta x}{\delta t} + f_y \frac{\delta y}{\delta t} + \epsilon_1 \frac{\delta x}{\delta t} + \epsilon_2 \frac{\delta y}{\delta t}.$$

ಈಗ $\delta x \to 0$ ಮತ್ತು $\delta y \to 0$ ಆದರೆ, $\delta t \to 0$, $\epsilon_1 \to 0$, $\epsilon_2 \to 0$. ಆದ್ದರಿಂದ ಪರಿಮಿತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \ldots. \quad \text{(iii)}$$

$[\epsilon_1(\delta x/\delta t) + \epsilon_2(\delta y/\delta t)] \to 0$ ಆಗುವುದರಿಂದಲೇ (i) ರಲ್ಲಿ $(f_x\delta x + f_y\delta y)$ ಎಂಬ ಭಾಗವನ್ನು δz ನ ಮುಖ್ಯಭಾಗವೆಂದು ಕರೆಯುವುದು. (ii) ನ್ನು ನೇರವಾಗಿ dt ಎಂಬ ಅಂತರಾಂಶದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ (iii) ನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ರೀತಿ, $z=f(x, y)$, $x=\phi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ ಆದಾಗ,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

ಮತ್ತು
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \qquad \ldots. \quad \text{(iv)}$$

ಮತ್ತೆ $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು y ಯನ್ನು x ನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದಾಗ (§ 2.38),

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \qquad \ldots. \quad \text{(v)}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ $z=f(x, y)$, $y=\phi(x)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾದಕಾರಣ, (iii) ರಿಂದ

$$\frac{dz}{dx}=f_x\frac{dx}{dx}+f_y\frac{dy}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}$$

ಆದರೆ $z=0$; $\therefore$ $dz/dx=0$; $\therefore$ $f_x+f_y\frac{dy}{dx}=0.$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (v) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ಆದರೆ, $dy/dx=-f_x/f_y$ ಎಂದು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ (verify).

2. $$z=\frac{x}{y}-\frac{y}{x},$$

ಸಂಗತ $x=$ ಕಾಸ್ಎಚ್ θ, $y=$ ಸೈನ್ಎಚ್ θ

ಆದರೆ,

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}$$

ಎಂದು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ.

5.6. ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿ—ಎರಡು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ (Taylor's theorem—for functions of two independent variables.)

(a, b) ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ n ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ ಪಾರ್ಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳಿದ್ದು. $(a+h, b+k)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಆ ಸಾಮೀಪ್ಯ ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$f(a+h,\ b+k)=f(a,\ b)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,\ b)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,\ b)$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b)$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f(a+\theta h,\ b+\theta k),$$
$$0<\theta<1,$$

ಆಗುವಂತೆ θ ಗೆ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾದರೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $x=a+ht,\quad y=b+kt$ .... (i)

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ t ಯು 0 ಇಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ ವಿಸ್ವಭಾವಿಸಿದಂತೆ, (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು (a, b) ಮತ್ತು $(a+h, b+k)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ದತ್ತ ಸಾವಿಪ್ಯದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. (ಈ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಈ ಸಾಧನೆಗೆ ಯಾವ ಅಪೋಹವೂ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಸಾವಿಪ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಅನೇಕ ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ಆಯಾ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ; ಅಷ್ಟೆ.) ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ

$$f(x,\ y)=f(a+ht,\ b+kt)=\phi(t) \quad .... \quad \text{(ii)}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ t ಎಂಬ ಒಂದೇ ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ § 4.4 ರ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಪ್ರಕಾರ

$$\phi(t)=\phi(0)+\frac{t}{1!}\phi'(0)+\frac{t^2}{2!}\phi''(0)+\cdots$$

$$+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\phi^{n-1}(0)+\frac{t^n}{n!}\phi^n(\theta t),\ 0<\theta<1, \quad .... \quad \text{(iii)}$$

ಆದರೆ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ

$$\phi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (\S\ 5.5)$$

$$=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x, y);$$

$$\phi''(t)=\frac{d}{dt}\phi'(t)$$

$$=\left(k\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y);$$

ಇತ್ಯಾದಿ.

$$\phi^r(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x, y),\ r=1, 2, 3, ..., n.$$

$$\therefore\ \phi^r(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a, b), \qquad ,,$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (iii) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿ (substitute) ತರುವಾಯ $t=1$ ಹಾಕಿದರೆ ಸಾಧನೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿ. ಮೇಲಿನ ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಲ್ಲಿ $a=b=0$, $h=x$ ಮತ್ತು $k=y$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$f(x, y)=f(0, 0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0, 0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(0,0)$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}+\cdots+y^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\right)f(0, 0)$$

$$+\frac{1}{n!}\left(x^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+\cdots+y^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\right)f(\theta x, \theta y),$$

$$0<\theta<1,$$

ಎಂಬ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: (1) h, k ಗಳು ಸ್ಥಿರಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನಂತೆ

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, x, y ಗಳು ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳಾದ್ದರಿಂದ

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಲ್ಲಿ

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^r,\ r=1, 2, 3, \ldots, n$$

ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಕ್ಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(2) ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದಾಗಲೂ ಟೇಲರ್ ಮತ್ತು ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗಳ ರೂಪಗಳು ಮೇಲಿನ ರೂಪಗಳಿಗೆ ಸದೃಶವಾದುವು. ಅವುಗಳ ಸಾಧನೆಗಳೂ ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ.

5.7. ಲಾಪ್ಲಾಸಿಯನ್‌ನಿನ ರೂಪಾಂತರಗಳು (transformations of the Laplacean).

$V(x, y, z)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ V_{xx}, V_{yy}, V_{zz} ಎಂಬ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳಿವೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

ಎಂಬ ಪ್ರಕಾಶಕಕ್ಕೆ (expression) ಲಾಪ್ಲಾಸಿಯನ್ (Laplacean) ಎಂದೂ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

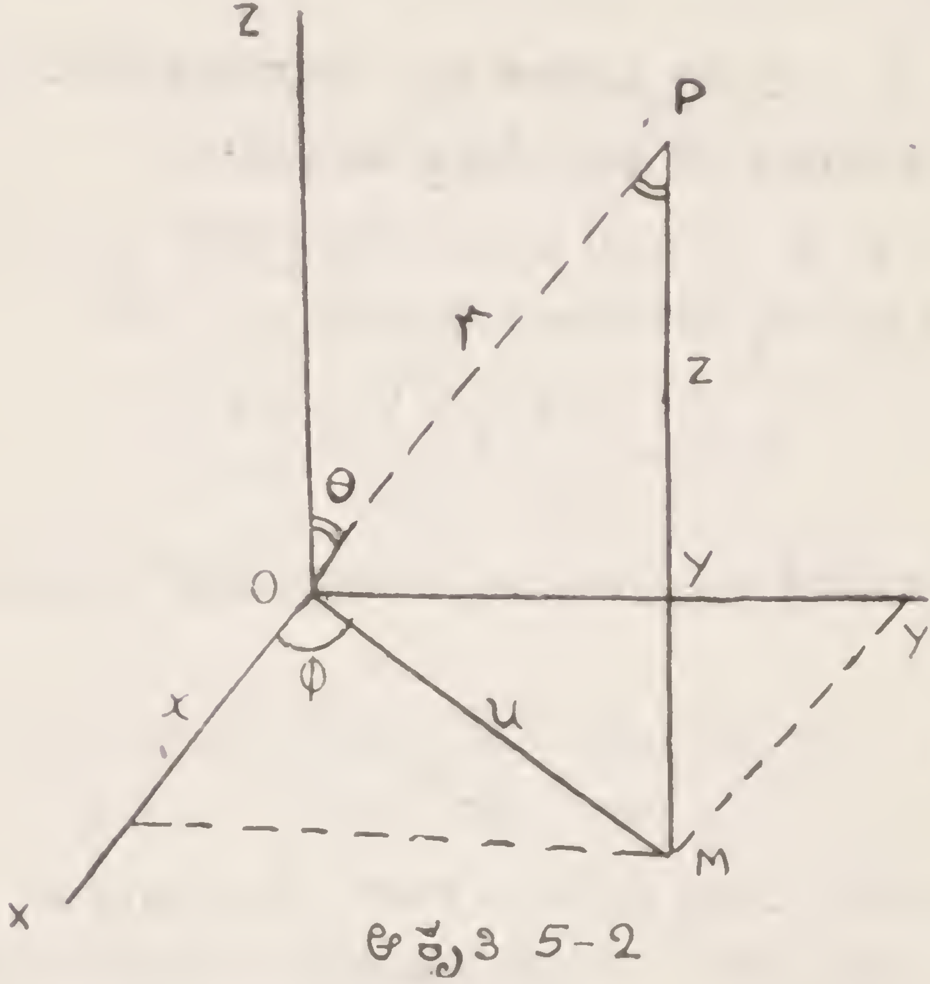
ಎಂಬ ಕಾರಕಕ್ಕೆ ಲಾಪ್ಲಾಸಿಯನ್ ಕಾರಕ (Laplacean operator) ಎಂದೂ ಹೆಸರು. ಲಾಪ್ಲಾಸಿಯನ್‌ನಿನ ಕೆಲವು ರೂಪಾಂತರಗಳು ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ (applied mathematics) ಅಲ್ಲಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಇದರ ಮುಖ್ಯ ರೂಪಾಂತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗುವುದು.

(1) ಕಾಂಡವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ $\nabla^2 V$ ($\nabla^2 V$ in cylindrical coordinates).

$P(x, y, z)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ XOY ಎಂಬ ಸಮತಲದಮೇಲೆ PM ಎಂಬ ಲಂಬವು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ (ಆಕೃತಿ 5–2). ಆಗ $OM = u$, $\angle XOM = \phi$ ಆದರೆ, (u, ϕ, z) ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು P ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತವೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ

ಕಾಂಡವ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (cylindrical coordinates) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ,

$x = u$ ಕಾಸ್ ϕ, $y = u$ ಸೈನ್ ϕ .... (i)



ಆಕೃತಿ 5-2

ಈಗ, $V = V(u, \phi, z)$ ಆದರೆ,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad .... \text{(A)}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

(i) ರಿಂದ $u = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, ಮತ್ತು $\phi =$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}$ (y/x).

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{u} =$ ಕಾಸ್ ϕ ; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{u} =$ ಸೈನ್ ϕ ;

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{u^2} = -\frac{\text{ಸೈನ್}\,\phi}{u}$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{u^2} = \frac{\text{ಕಾಸ್}\,\phi}{u}$.

ಇಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಅಂತರಣ ಮಾಡುವಾಗ y ಯನ್ನು ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದೂ, y ಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಅಂತರಣ ಮಾಡುವಾಗ x ನ್ನು ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಮೊದಲು u ಮತ್ತು ϕ ಗಳನ್ನು x, y ಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದೆ. ಈಗ

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial V}{\partial u}\text{ಕಾಸ್}\phi-\frac{\partial V}{\partial \phi}\;\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}$$

$$\because \qquad \frac{\partial}{\partial x}\equiv\text{ಕಾಸ್}\phi\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}\;\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

ಇಲ್ಲಿ $\partial V/\partial x$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ y ಸ್ಥಿರಿ; ಮತ್ತು $\partial V/\partial u$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಾಗ ϕ ಸ್ಥಿರಿ. ಮತ್ತೆ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$=\left(\text{ಕಾಸ್}\phi\,\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}\;\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\text{ಕಾಸ್}\phi\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}\;\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)$$

$$=\text{ಕಾಸ್}\phi\left[\text{ಕಾಸ್}\phi\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u^2}\;\frac{\partial V}{\partial \phi}-\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}\;\frac{\partial^2 V}{\partial u\partial \phi}\right]$$

$$-\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}\Bigg[-\text{ಸೈನ್}\phi\frac{\partial V}{\partial u}+\text{ಕಾಸ್}\phi\frac{\partial^2 V}{\partial u\partial \phi}$$

$$-\frac{\text{ಕಾಸ್}\phi}{u}\;\frac{\partial V}{\partial \phi}-\frac{\text{ಸೈನ್}\phi}{u}\;\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\Bigg]$$

$$=\text{ಕಾಸ್}^2\phi\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{2\;\text{ಕಾಸ್}\phi\;\text{ಸೈನ್}\phi}{u^2}\;\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$- \frac{2 \text{ಕಾಸ್}\phi \text{ ಸೈನ್}\phi}{u} \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial \phi} + \frac{\text{ಸೈನ್}^2\phi}{u} \frac{\partial V}{\partial u}$$

$$+ \frac{\text{ಸೈನ್}^2\phi}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{....} \quad \text{(iii)}$$

ಮತ್ತೆ, $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$

$$= \frac{\partial V}{\partial u} \text{ ಸೈನ್}\phi + \frac{\text{ಕಾಸ್}\phi}{u} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \text{ಸೈನ್}\phi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\text{ಕಾಸ್}\phi}{u} \frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \text{....} \quad \text{(iv)}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(\text{ಸೈನ್}\phi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\text{ಕಾಸ್}\phi}{u} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\left(\text{ಸೈನ್}\phi \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\text{ಕಾಸ್}\phi}{u} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)$$

$$= \text{ಸೈನ್}^2\phi \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - \frac{2 \text{ ಕಾಸ್}\phi \text{ ಸೈನ್}\phi}{u^2} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$+ \frac{2 \text{ ಕಾಸ್}\phi \text{ ಸೈನ್}\phi}{u} \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial \phi} + \frac{\text{ಕಾಸ್}^2\phi}{u} \frac{\partial V}{\partial u}$$

$$+ \frac{\text{ಕಾಸ್}^2\phi}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{....} \quad \text{(v)}$$

ಈಗ (iii) ಮತ್ತು (v) ರ ಸಂಕಲನದಿಂದ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \qquad \text{....} \quad \text{(vi)}$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕಡೆಗೂ $\partial^2 v/\partial z^2$ ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ (A) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(2) ಗೋಳ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ $\nabla^2 V$ ($\nabla^2 V$ in spherical polar coordinates).

ಆಕೃತಿ 5–2 ರಲ್ಲಿ $OP = r$, $\angle ZOP = \theta$ ಮತ್ತು $\angle XOM = \phi$ ಆದರೆ. (r, θ, ϕ) ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯಾತ್ರಯವು P ಬಿಂದುವನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಗೋಳಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (spherical polar coordinates) ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ $u = r$ ಸೈನ್θ ; ಆದ್ದರಿಂದ

$$x = r \text{ ಸೈನ್}\theta \text{ ಕಾಸ್}\phi,\ y = r \text{ ಸೈನ್}\theta \text{ ಸೈನ್}\phi$$
$$\text{ಮತ್ತು } z = r \text{ ಕಾಸ್}\theta.$$

ಈಗ $V = V(r, \theta, \phi)$ ಆದರೆ,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ಕಾಟ್}\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$+ \frac{1}{r^2 \text{ಸೈನ್}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

ಮೇಲಿನ (A) ಇಂದ

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right) + \frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \ldots\ldots \quad \text{(vii)}$$

ಆದರೆ, $z = r$ ಕಾಸ್θ, $u = r$ ಸೈನ್θ.

$\therefore$ ಮೇಲಿನ (vi) ರಿಂದ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

ಅಲ್ಲದೆ ಮೇಲಿನ (iv) ರಿಂದ

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \text{ಸೈನ್}\,\theta \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\text{ಕಾಸ್}\,\theta}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

ಇವುಗಳನ್ನು (vii) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ (B) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

[ಉದಾ. 17, 18, 19, ಅಭ್ಯಾಸ 5 ನೋಡಿ.]

5·8. ಜಕೋಬಿಯನ್‌ಗಳು (**Jacobians**).

R ಎಂಬ ಒಂದು ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ

$$u_r(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ r = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ಎಂಬ n ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ದತ್ತವಾಗಿವೆಯೆಂದೂ, ಈ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯ ಹಂತದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳಿವೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial n_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ಎಂಬ ಚೌಬಂಧಕ್ಕೆ ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನಾಪ್ರಕ್ರಮದ (system) **ಜಕೋಬಿಯನ್** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಇದನ್ನು ಅನುಸ್ಥಾಪ ಚೌಬಂಧ (fnnctional determinant) ಎಂದು ಕರೆಯುವುದೂ ಉಂಟು.

ಈ ಚೌಬಂಧವನ್ನು $\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, u_2, \ldots, x_n)}$ ಅಥವಾ J ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x = r$ ಕಾಸ್θ, $y = r$ ಸೈನ್θ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \text{ಕಾಸ್}\theta, & -r\ \text{ಸೈನ್}\theta \\ \text{ಸೈನ್}\theta, & r\ \text{ಕಾಸ್}\theta \end{vmatrix} = r.$$

2. $x + y + z = \xi$, $y + z = \xi\eta$, $z = \xi\eta\zeta$ ಆದರೆ, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \xi^2\eta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $x = \xi(1-\eta)$, $y = \xi\eta(1-\zeta)$, $z = \xi\eta\zeta$.

$$\therefore \quad J = \begin{vmatrix} 1-\eta, & -\xi, & 0 \\ \eta(1-\zeta), & \xi(1-\zeta), & -\xi\eta \\ \eta\zeta, & \xi\zeta, & \xi\eta \end{vmatrix}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿಗೂ ಆದರ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲುಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಸಂಕಲಿಸಿದರೆ,

$$J = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \eta, & \xi, & 0 \\ \eta\zeta, & \xi\zeta, & \xi\eta \end{vmatrix} = \xi^2\eta.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 5

1. $f(x, y) =$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\sqrt{(xy)}$ ಆದರೆ, $f_x(1, 2) = 2 f_y(1, 2)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $z(x+y) = x^2 + y^2$ ಆದರೆ,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $f(x, y) =$ ಸೈನ್ (y/x) ಆದರೆ, $f_{yx} = f_{xy}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $u = C$ ಕಾಸ್$(x + at) + D$ ಸೈನ್$(x - at)$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5.
$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4xt}}$$

ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $u =$ ಲಾಗ್ $(x^2 + y^2 + z^2)$ ಆದರೆ,

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = z \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $y = x$ ಟ್ಯಾನ್ u ಆದರೆ, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $u =$ ಲಾಗ್$\sqrt{(x^2 + y^2)}$ ಆದರೆ, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $u = xy/(x + y)$ ಆದರೆ,

$$x^2 u_{xx} + 2xy \ u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $u = x^3 + y^3 - 3xyz$ ಆದರೆ,

$$xu_x + yu_y = 3u,$$

ಮತ್ತು $$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 6u$$

ಎಂದು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ (verify).

11. ಸೈನ್ $u = (x^2 + y^2)/(x + y)$ ಆದರೆ,

$$xu_x + yu_y = \text{ಟ್ಯಾನ್}\, u$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $$\theta = t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

ಆದರೆ,

$$\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = \frac{\theta\partial}{\partial t}$$

ಆಗುವಂತೆ n ನನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. $u = (1 - 2xy + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ ಆದರೆ

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = y^2u^3,$$

ಮತ್ತು $$\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = 0$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $$f = \begin{vmatrix} x^2, & y^2, & z^2 \\ x, & y, & z \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

ಆದರೆ, $f_{yz} + f_{zx} + f_{xy}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ ಆಗಿ, $f_x = f_y = f_z = 0$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$\begin{vmatrix} a, & h, & g \\ h, & b, & f \\ g, & f, & c \end{vmatrix} = 0.$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $x = 1 +$ ಕಾಸ್θ, $y = 1 -$ ಕಾಸ್θ ಆದರೆ,

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\theta}$$

ಎಂದು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ.

17. $f(x, y) = x^y - y^x = 0$ ಆದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{fx}{fy}$$

ಎಂದು ತಾಳೆ ಮಾಡಿ.

18. $V = r^2/\theta$, r ಕಾಸ್ $\theta = x$ ಮತ್ತು r ಸೈನ್$\theta = y$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{r}{\theta}\left[2 \text{ ಕಾಸ್}\theta + \frac{\text{ಸೈನ್}\theta}{\theta}\right]$$

ಮತ್ತು

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{r}{\theta}\left[2 \text{ ಸೈನ್}\theta - \frac{\text{ಕಾಸ್}\theta}{\theta}\right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. $f(x, y) = 0$ ಆದರೆ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{f_y^{\,3}}\left[f_{xx}f_y^{\,2} - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^{\,2}\right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. (i) $V=f(r)$, ಸಂಗತ $r=\sqrt{(x^2+y^2)}$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial V}{\partial r}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(ii) $V=f(r)$, ಸಂಗತ $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\ \frac{\partial V}{\partial r}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(iii) $V=f(r)$,

ಸಂಗತ $r=\sqrt{(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)}$ ಆದರೆ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2{}^2}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial x_n{}^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\ \frac{\partial V}{\partial r}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. $\nabla^2 V=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ತೋರಿಸಿ :

(i) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\text{ಸೈನ್}\,\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{ಸೈನ್}\,\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{ಸೈನ್}^2\theta}\ \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0;$$

(ii) $$r\frac{\partial^2(Vr)}{\partial r^2}+\frac{1}{\text{ಸೈನ್}\,\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{ಸೈನ್}\,\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{ಸೈನ್}^2\theta}\ \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0;$$

(iii) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \text{ ಸೈನ್}\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{ಸೈನ್}\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\text{ಸೈನ್}\theta}\ \frac{\partial V}{\partial\phi}\right)=0;$$

(iv) $$r\frac{\partial^2(Vr)}{\partial r^2}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right.$$

$$+\frac{1}{1-\mu^2}\ \frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}=0,$$

ಸಂಗತ $\mu=$ ಕಾಸ್ θ.

22. $V=f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, ಸಂಗತ

$$\xi=l_1x+l_2y+l_3z,$$
$$\eta=m_1x+m_2y+m_3z,$$
$$\zeta=n_1x+n_2y+n_3z,$$

$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1,\quad l_1^2+m_1^2+n_1^2=1,$ ಇತ್ಯಾದಿ; ಮತ್ತು $l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=1,\ l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=1,$ ಇತ್ಯಾದಿ ಆದರೆ, ಆಗ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[$$\frac{\partial V}{\partial x}=l_1\frac{\partial V}{\partial\xi}+m_1\frac{\partial V}{\partial\eta}+n_1\frac{\partial V}{\partial\xi},$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2\partial}{\partial x^2}=\left(l_1\frac{\partial}{\partial\xi}+m_1\frac{\partial}{\partial\eta}+u_1\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$\cdot\left(l_1\frac{\partial V}{\partial\xi}+m_1\frac{\partial V}{\partial\eta}+n_1\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right),$$ ಇತ್ಯಾದಿ.]

23. $u_1 =$ ಕಾಸ್ x_1,

$u_2 =$ ಸೈನ್ x, ಕಾಸ್ x_2,

$u_3 =$ ಸೈನ್ x_1 ಸೈನ್ x_2 ಕಾಸ್ x_3,

. . . .

$u_n =$ ಸೈನ್ x_1ಸೈನ್ x_2 . . . ಸೈನ್ x_{n-1}ಕಾಸ್ x_n

ಆದರೆ,

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$= (-1)^n$ ಸೈನ್$^n x_1$ ಸೈನ್$^{x-1} x_2$ . . . ಸೈನ್$^2 x_{n-1}$ ಸೈನ್ x_n

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

24. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \xi_1$

$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \xi_1\xi_2$

$x_3 + \ldots + x_n = \xi_1\xi_2\xi_3$

. . . .

$x_n = \xi_1\xi_2\xi_3 \ldots \xi_n$

ಆದರೆ,

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} = \xi_1^{n-1}\xi_2^{n-2}\xi_3^{n-3} \ldots \xi_{n-1}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

[ಉದಾ. 2, §5.8 ನೋಡಿ.]

25. ಯುಕ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)} \cdot \frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

[ಚೌಬಂಧಗಳ ಗುಣಕಾರವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ.]

26. ಟೇಲರ್ ಮತ್ತು ಮೆಕ್‌ಲಾರಿನ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಗಳನ್ನು ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಸಾಧಿಸಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ VI

ಧಾರಣಗಳು, ಉಪಲಕ್ಷ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ದೋಷಗಳು

(rates, approximations and errors)

6.1. ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವು ಒಂದು ಧಾರಣಮಾಪಕವೆಂದು ಪರಿಗಣನೆ (differential coefficient as a rate-measurer).

§ 2.1 ರ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ, x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ವರ್ಧನವು δx ಆದಾಗ y ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ವರ್ಧನವು δy ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರೈರಾಶಿಯ ಪ್ರಕಾರ, xನ ವರ್ಧನವು 1 ಆದಾಗ yನ ವರ್ಧನವು $\delta y/\delta x$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಪರಿಮಿತಿಯಲ್ಲಿ dy/dx ಎಂಬ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನವು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y ವಿಸ್ವಭಾವಿಯು x ನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವ ಧಾರಣವನ್ನು (rate) ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಬಿಂದುವು $s=f(t)$ ಎಂಬ ನಿಯಮಾನುಸಾರವಾಗಿ t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ಕಾಲದಲ್ಲಿ s ಅಡಿ ದೂರ ಚಲಿಸಿದರೆ, t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದರ ವೇಗವು $ds/dt=f'(t)$ ಮತ್ತು ಅದರ ತ್ವರ್ಯಕವು $d^2s/dt^2=f''(t)$.

6.2. ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನಕ್ಕೆ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯಗಳು (approximations to the differential coefficient).

δx ಚಿಕ್ಕದಾದಾಗ $\delta y/\delta x$ ಎಂಬ ಧಾರಣರಾಶಿಯನ್ನು (ratio) dy/dx ಎಂಬ ಧಾರಣದ (rate) ಒಂದು ಉಪಲಕ್ಷ್ಯ (ಉಪಲಕ್ಷಣ, ಉಪಸಮ, ಉಪಕಂಠ, approximate) ಮೂಲ್ಯವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸ

ಬಹುದು; ಏಕೆಂದರೆ $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\delta y/\delta x \to dy/dx$. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ, dy/dx ಗೂ $\delta y/\delta x$ ಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು δx ನ ಬೆಲೆಯನ್ನವ ಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ.

6·3. ದೋಷಗಳು (errors).

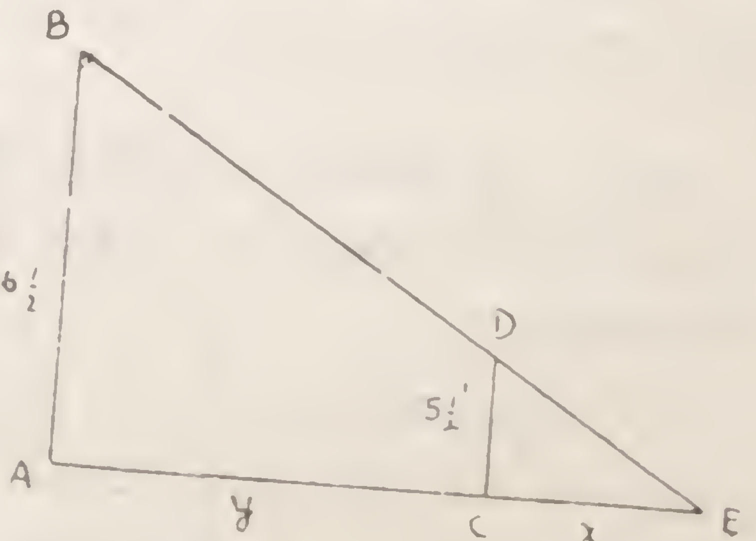
x ನ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ δx ಎಂಬ ಚಿಕ್ಕದೊಂದು ದೋಷವು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ y ನಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ δy ಎಂಬ ದೋಷವು ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ $(dy/dx)\cdot\delta x$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಏಕೆಂದರೆ, δx ಚಿಕ್ಕದಾದಾಗ dy/dx ಮತ್ತು $\delta y/\delta x$ ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ ಸಮವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಒಂದು ಬಿಂದುವು t ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ s ದೂರವು $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$, (u ಮತ್ತು f ಸ್ಥಿರಗಳು) ಆದರೆ, ಅದರ ಆದಿವೇಗ (initial velocity) ಮತ್ತು ತ್ವರ್ಯಕಗಳನ್ನು (acceleration) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವೇಗ $= ds/dt = u + ft$; ಇದರಲ್ಲಿ $t = 0$ ಹಾಕಿದರೆ, ಆದಿವೇಗ $= u$. ಮತ್ತೆ, ತ್ವರ್ಯಕ $= dv/dt = d^2s/dt^2 = f$.

2. $5\frac{1}{2}$ ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು $16\frac{1}{2}$ ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಘಂಟೆಯೊಂದಕ್ಕೆ 3ಮೈಲಿ ವೇಗದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ನೆರಳು ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವ ವೇಗವೆಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 6-1

ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ x ಆದರೆ (ಆಕೃತಿ 6-1), dx/dt ಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ದತ್ತ : $dy/dt = 3$. ಈಗ

$$\frac{EA}{EC} = \frac{AB}{CD}; \text{ ಎಂದರೆ, } \frac{x+y}{x} = 3.$$

$$\therefore\ 2x = y. \qquad \therefore\ 2\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 3.$$

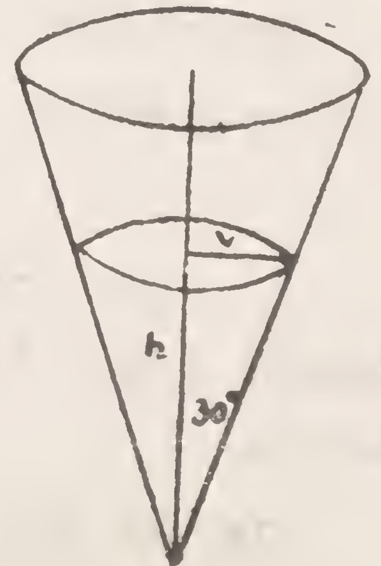
$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = \tfrac{3}{2} \text{ ಮೈ/ಘಂ.} \quad \text{ಉತ್ತರ.}$$

3. 60° ಶೃಂಗಕೋನವುಳ್ಳ (vertical angle) ಒಂದು ಅಪಶೃಂಗ (inverted) ಸಮ ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವಿನೊಳಕ್ಕೆ (right circular cone) ಒಂದು ನಲ್ಲಿಯಿಂದ ನೀರು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ 66 ಘ. ಅಂ. ಗಳಂತೆ ಸುರಿಯುತ್ತಿದೆ. ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು $5\frac{1}{4}$ ಅಂಗುಲಗಳಾದಾಗ ಆ ಆಳವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ? $(\pi = 22/7)$.

ನೀರಿನ ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು h ಆದಾಗ ಅದರ ಉಪವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಎಂದೂ ನೀರಿನ ಶಂಕುವಿನ ಘನವು v ಎಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 6-2). $dv/dt = 66$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ. $h = 21/4$ ಆದಾಗ dh/dt ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈಗ

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = 66\frac{dh}{dv} \qquad \text{....} \quad \text{(i)}$$

ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ, ದತ್ತ dv/dt ಯನ್ನು ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಇನ್ನೊಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿಸಿದೆಯೆಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಈಗ



ಆಕೃತಿ 6-2

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h,\ \text{ಮತ್ತು}\ \frac{r}{h} = \text{ಟ್ಯಾನ್}\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \quad v = \tfrac{1}{9}\pi h^3. \quad \therefore \frac{dv}{dh} = \tfrac{1}{3}\pi h^2. \quad \therefore \frac{dh}{dv} = \frac{3}{\pi h^2}.$$

ಈಗ (i) ರಿಂದ, $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{66 \times 3}{\pi h^2}$.

ಆದರೆ, $\pi = \frac{22}{7}$, ಮತ್ತು $h = \frac{21}{4}$.

$$\therefore \quad \frac{dh}{dt} = 2\tfrac{2}{7}\ \text{ಅಂ./ಸಿ.} \quad \text{ಉತ್ತರ.}$$

4. θ ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಗಳ (radians) ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ $\delta\theta$ ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಯಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ದೋಷವು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, ಅದರಿಂದ ಟ್ಯಾನ್θ ದ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ದೋಷವೆಷ್ಟು ? ಆಗ ಟ್ಯಾನ್θ ದ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯ ಮೂಲ್ಯವೆಷ್ಟು ?

$y =$ ಟ್ಯಾನ್θ ಆದರೆ, $dy/d\theta =$ ಸೆಕ್$^2\theta$.

$\delta\theta$ ಚಿಕ್ಕದಾದ್ದರಿಂದ $dy/d\theta$ ಮತ್ತು $\delta y/\delta\theta$ ಗಳು ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ

y ನ ದೋಷ $= \delta y =$ (ಸೆಕ್$^2\theta$)$\cdot\delta\theta$;

ಮತ್ತು y ನ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯಮೌಲ್ಯ $= y + \delta y$

$=$ ಟ್ಯಾನ್ $\theta +$ (ಸೆಕ್^{2} θ)$\cdot\delta\theta$.

5. ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಶತಮಾನಿಕ (ಶೇಕಡ) ದೋಷವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಶತಮಾನಿಕ ದೋಷದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ r, ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ S ಆದರೆ, $S = \pi r^2$.

$\therefore\ dS/dr = 2\pi r.\quad \therefore$ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ $\delta S = 2\pi r\delta r$.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು πr^2 ಆದಾಗ, ದೋಷವು $2\pi r\delta r$ ಆದರೆ,

,, 100 ,, $200\,\delta r/r$;

ಎಂದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಶೇಕಡ ದೋಷವು $200\delta r/r$.

ಮತ್ತೆ, ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಆದಾಗ, ದೋಷವು δr ಆದರೆ,

ತ್ರಿಜ್ಯವು 100 ಆದಾಗ, ದೋಷವು $100\,\delta r/r$;

ಎಂದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ಶೇಕಡ ದೋಷವು $100\,\delta r/r$.

ಇದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಶೇಕಡ ದೋಷದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿದೆ.

6. ಒಂದು ಆಯದ (ದೀರ್ಘ ಚತುರಸ್ರ, rectangle) ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು a ಮತ್ತು b. ಇವುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವಾಗ δa ಮತ್ತು δb ಎಂಬ ಚಿಕ್ಕ ದೋಷಗಳು ಸಂಭವಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಆಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಸಂಭವಿಸುವ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯ ದೋಷವೆಷ್ಟು?

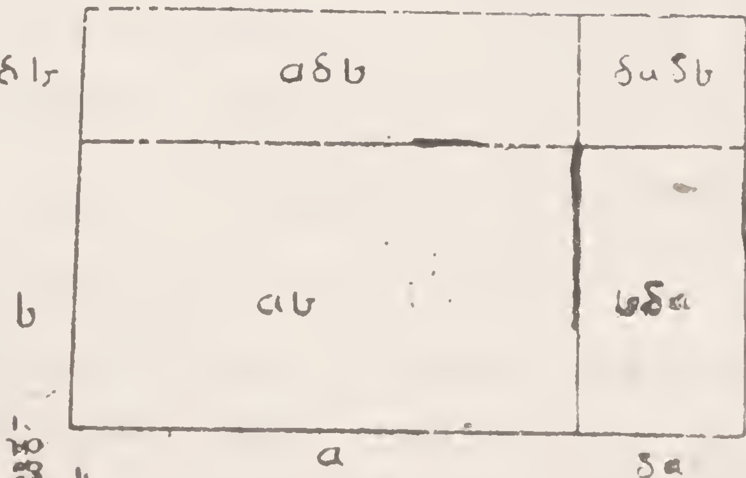
ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು A ಆದರೆ, $A = ab$. $\therefore dA = b\,da + a\,db$,

$\therefore \delta A = b\delta a + a\delta b$ (ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ) .... (i)

ಇದು ಉಪಲಕ್ಷ್ಯದೋಷ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ದೋಷವು

$b\delta a + a\delta b + \delta a\delta b$

ಆಗುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 6–3) $\delta a, \delta b$ ಗಳು ಚಿಕ್ಕವಾದಾಗ $\delta a\cdot\delta b$ ಎಂಬ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬಹಳ ಚಿಕ್ಕದಾದ್ದರಿಂದ ಉಪೇಕ್ಷಣೀಯವಾದುದು.



ಆಕೃತಿ 6-3

b ನ ಅಳತೆ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, a ನ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ದೋಷವಿದ್ದಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ನ ದೋಷವು $\delta A_1 = b\delta a$ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. ಹಾಗೆಯೇ

a ನ ಅಳತೆ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, b ನ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ದೋಷವಿದ್ದಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ನ ದೋಷವು $\delta A_2 = a\delta b$ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು. a ಮತ್ತು b ಎರಡರ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲೂ ಚಿಕ್ಕ ದೋಷಗಳಿದ್ದಾಗ, (i) ರಿಂದ $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$. ಹೀಗೆ δa ಮತ್ತು δb ಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿ δA_1 ಮತ್ತು δA_2 ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಂಕಲಿಸಿದರೆ δA ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ $V = abc$ ಆಗಿ, a, b, c ಗಳ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ $\delta a, \delta b, \delta c$ ಎಂಬ ಚಿಕ್ಕ ದೋಷಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ $\delta V = bc\delta a + ca\delta b + ab\delta c$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6

1. ಒಂದು ಬಿಂದುವು $s = 44t - 6t^2$ ಎಂಬ ನಿಯಮಾನುಸಾರವಾಗಿ t ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ s ಅಡಿ ದೂರ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಚಲನವು ಸ್ತಂಭಿತವಾಗುವ ವೇಳೆಗೆ ಆ ಬಿಂದುವು ಎಷ್ಟು ದೂರ ಚಲಿಸಿರುತ್ತದೆ?

2. ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ, ದೂರ s ಮತ್ತು ಕಾಲ t ಗಳ ಸಂಬಂಧವು

$$s = ae^t + be^{-t}$$

ಆದರೆ, ತ್ವರ್ಯಕದ ಪ್ರಮಾಣವು ಯಾವಾಗಲೂ ದೂರದ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ

3. ಒಂದು ಗಾಳಿಯ ಪಟಕ್ಕೆ ದಾರವನ್ನು 1 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ 2 ಅಡಿಗಳಂತೆ ಬಿಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ದಾರವು ರಸಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಸದಾ 45° ಕೋನದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಗಾಳಿಯ ಪಟವು ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವು 1 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಧಿಸುತ್ತಿದೆ?

4. ಗೋಡೆಗೆ ಒರಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ 13 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಏಣಿಯು ಕೆಳತುದಿಯು ನೆಲದಮೇಲೆ ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ 1 ಅಂಗುಲದಂತೆ ಗೋಡೆಯಿಂದ ದೂರವಾಗಿ ಸರಿಯುತ್ತಿದೆ. ಅದರ ಕೆಳತುದಿಯು

ಗೋಡೆಯಿಂದ 5 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿರುವಾಗ ಅದರ ಮೇಲ್ತುದಿಯು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಗುಲದಂತೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ?

5. ಒಂದು ಲೋಹದ ಚದುರವು (square) ಕಾಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಅಂಚು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ 0.02 ಅಂಗುಲದಂತೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದರೆ, ಅಂಚು 8 ಅಂಗುಲವಾದಾಗ ಚದುರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ?

6. ಒಂದು ಸರೋವರದ ಗಭೀರ ನಿರ್ಮಲ ಜಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಲ್ಲುಹರಳನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಅಲೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 1 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ 1·75 ಅಡಿಗಳಂತೆ ವರ್ಧಿಸುತ್ತಿದೆ. ಎರಡನೆಯ ಸೆಕೆಂಡಿನ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಆ ಅಲೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ? ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ? ($\pi = 22/7$).

7. ಒಂದು ಲೋಹದ ಘನವು (cube) ಕಾಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಅಂಚು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ 0·05 ಸೆಂ.ಮಿ. ನಂತೆ ವರ್ಧಿಸಿದರೆ, ಅಂಚು 2 ಸೆಂ.ಮಿ. ಆದಾಗ, ಘನ ಮತ್ತು ಮುಖಸ್ಥಲಗಳು (volume and surface) ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ?

8. ಒಂದು ಚೆಂಡಿನೊಳಕ್ಕೆ ಗಾಳಿಯನ್ನು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ 35 ಘ. ಅಂ. ಗಳಂತೆ ಒದಗಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ಚೆಂಡಿನ ವ್ಯಾಸವು 14 ಅಂ. ಗಳಾದಾಗ ಅದರ ಮುಖಸ್ಥಲವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ? ($\pi = 22/7$).

9. ಒಂದು ಗೋಳದ (sphere) ವ್ಯಾಸವು (diameter) 1 ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 0·22 ಅಂಗುಲಗಳಂತೆ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತಿದೆ. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು $3\frac{2}{11}$ ಅಂಗುಲಗಳಿದ್ದಾಗ ಅದರ ಘನ ಮತ್ತು ಮುಖಸ್ಥಲಗಳು 1 ಮಿನಿಟ್ಟಗೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತವೆ? ($\pi = 22/7$).

10. ತಳದ ವ್ಯಾಸವು 1 ಅ. 2 ಅಂ. ಉಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮ ವರ್ತುಳೀಯ ಕಾಂಡಾಕೃತಿಯ (right circular cylinder) ಪಾತ್ರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ನೀರು ಏಕಪ್ರಕಾರವಾಗಿ ಸುರಿಯುತ್ತಿದೆ. ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು ಒಂದು ಮಿನಿಟ್ಟಿಗೆ ಅರ್ಧ ಅಂಗುಲದಂತೆ ಏರುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪಾತ್ರೆಯೊಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಎಷ್ಟು ನೀರು ಸುರಿಯುತ್ತಿದೆ? ($\pi = 22/7$).

11. ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಧಾನ್ಯವು 21 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಿಗೆ 22 ಘನ ಅಡಿಗಳಂತೆ ರಾಶಿಯಾಗಿ ಬೀಳುತ್ತಿದೆ. ರಾಶಿಯು ಒಂದು ಸಮವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವಿನ (right circular cone) ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿದೆ, ಮತ್ತು ಅದರ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಯಾವಾಗಲೂ ಶೃಂಗದ (vertex) ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, 64 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ರಾಶಿಯ ಎತ್ತರವು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಅಂಗುಲಗಳಂತೆ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ? ($\pi = 22/7$).

12. 90° ಶೃಂಗಕೋನವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮ ವರ್ತುಳೀಯ ಅಪಶೃಂಗ ಶಂಕುವಿನೊಳಕ್ಕೆ (inverted right circular cone) ನೀರು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ 231 ಘ. ಸೆಂ. ಮಿ. ಗಳಂತೆ ಹರಿಯುತ್ತಿದೆ. ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು 10·5 ಸೆಂ. ಮಿ. ಗಳಿಗೆ ಏರಿದಾಗ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ಏರುತ್ತದೆ? ಮತ್ತು ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದ ವರ್ತುಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ಏರುತ್ತದೆ? ($\pi = 22/7$).

13. ಒಂದು ಲಾಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ (funnel), ರಂಧ್ರವನ್ನು ಮುಚ್ಚಿ, ನೀರನ್ನು ತುಂಬಲಾಗಿದೆ. ನೀರಿನ ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು ಒಂದು ಅಡಿ, ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲ್ಮಟ್ಟದ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸವೂ ಒಂದು ಅಡಿ. ರಂಧ್ರವನ್ನು ತೆರೆದಾಗ ನೀರು 1 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ 1 ಘ. ಅಂ. ನಂತೆ ಹರಿದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ನೀರು ಅರ್ಧಮಟ್ಟಕ್ಕೆ ಇಳಿದಾಗ ಅದರ ಮಟ್ಟದ ವರ್ತುಳದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 1 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆ?

14. ಅರ್ಧಗೋಳಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ (hemisphere) ಒಂದು ಬಟ್ಟಲಿನ ಕಂಠದ ವ್ಯಾಸವು (diameter) 10 ಅಂಗುಲವಿದೆ. ಬಟ್ಟಲಿನಲ್ಲಿ ನೀರು ತುಂಬಿದೆ. ಅದರ ತಲದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ರಂಧ್ರವನ್ನು ತೆರೆದಾಗ ನೀರು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ $3\frac{1}{7}$ ಘ. ಅಂ. ಗಳಂತೆ ಹರಿದುಹೋದರೆ, ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ನೀರಿನ ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ? ನೀರಿನ ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು 3 ಅಂಗುಲಗಳಾದಾಗ ಆ ಆಳವು ನಿಮಿಷವೊಂದಕ್ಕೆ ಯಾವ ಧಾರಣದಲ್ಲಿ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ? [ದತ್ತ: R ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳದ ಖಂಡದ (segment of a sphere) ಮಧ್ಯಮ ಆಳವು h ಆದರೆ, ಆ ಖಂಡದ ಘನವು $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$ ಇರುತ್ತದೆ.] $(\pi=22/7)$.

15. ಒಂದು ಗೋಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ $x\%$ ದೋಷವಿದ್ದರೆ, ಅದರಿಂದ ಆ ಗೋಳದ ಘನದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಶೇಕಡ ದೋಷವೆಷ್ಟು?

16. ABC ಎಂಬ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ a, b ಮತ್ತು $\angle C$ ಗಳನ್ನಳೆದು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ S ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಅಳತೆಗಳಲ್ಲಿ δa, δb, δC ಗಳಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕ ದೋಷಗಳಿವೆ. C ಮತ್ತು δC ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದು, S ನ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯದೋಷವು δS ಆದರೆ,

$$\frac{\delta S}{S}=\frac{\delta a}{a}+\frac{\delta b}{b}+(\text{ಕಾಟ್ } C)\cdot\delta C$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

a, b ಗಳ ಅಳತೆ ಸರಿಯಾಗಿದ್ದು, C ನ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ $x\%$ ದೋಷವಿದ್ದಿದ್ದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಶೇಕಡ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯ ದೋಷವೆಷ್ಟಾಗುತ್ತಿತ್ತು?

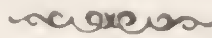
17. ABC ಎಂಬ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹುಗಳನ್ನಳೆಯುವಾಗ a ಬಾಹುವಿನಲ್ಲಿ ϵ ನಷ್ಟು ನ್ಯೂನತೆಯೂ (defect), b ಬಾಹು

ವಿದಲ್ಲಿ ϵ ನಷ್ಟು ಅತಿರೇಕವೂ (excess) ಸಂಭವಿಸಿವೆ, ಆದರೆ c ಬಾಹುವು ಸರಿಯಾಗಿ ಅಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಇದರಿಂದ ತ್ರಿಕೋನದ ಸಲೆ S ನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಉಪಲಕ್ಷ್ಯದೋಷವು δS ಆದರೆ,

$$\frac{\delta S}{S}=\frac{2(a-b)}{(c+a-b)(c-a+b)}.\epsilon$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. ಒಂದು ವಿದ್ಯುತ್ ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ C ವಿದ್ಯುತ್ ಪ್ರವಾಹವು θ ಪ್ರವಣಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $C=k$ ಟ್ಯಾನ್θ, ಸಂಗತ k ಸ್ಥಿರ. ಪ್ರವಣಕೋನದ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಶೇಕಡ 0·5 ರಷ್ಟು ದೋಷವಿದ್ದರೆ, ವಿದ್ಯುತ್ ಪ್ರವಾಹದಲ್ಲಿ ಶೇಕಡ θ/ಸೈನ್2θ ದಷ್ಟು ದೋಷವು ಸಂಭವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. (θ ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಮಾನದಲ್ಲಿದೆ.)



ಅಧ್ಯಾಯ VII

ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳು

(tangents and normals)

7.1. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ (tangent)

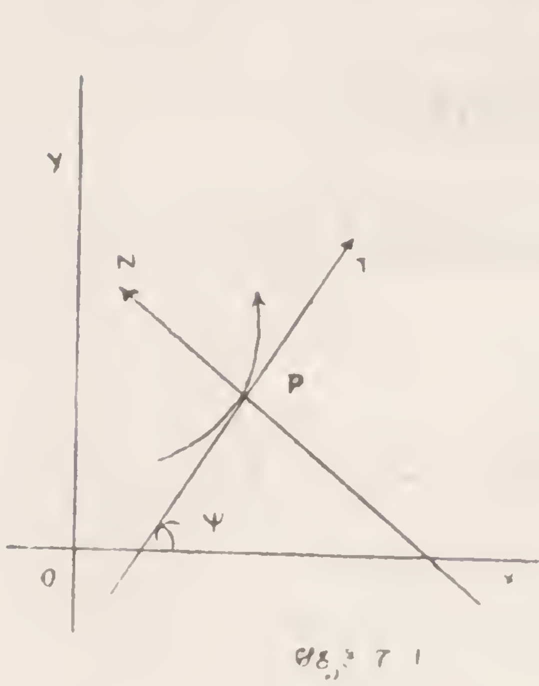
$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವೆಂದೂ, Q ಎಂಬ ಪ್ರಚಲಿತ ಬಿಂದುವು (current point) ಆ ರೇಖೆಯನ್ನನುಸರಿಸಿ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಮಿತಿ ಸುತ್ತದೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ QP ಎಂಬ ಛೇದಕದ (secant) ಪರಿಮಿತಿಯು TP ಆದರೆ, TP ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ದತ್ತಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. (ಆಕೃತಿ 2–1, 2–2).

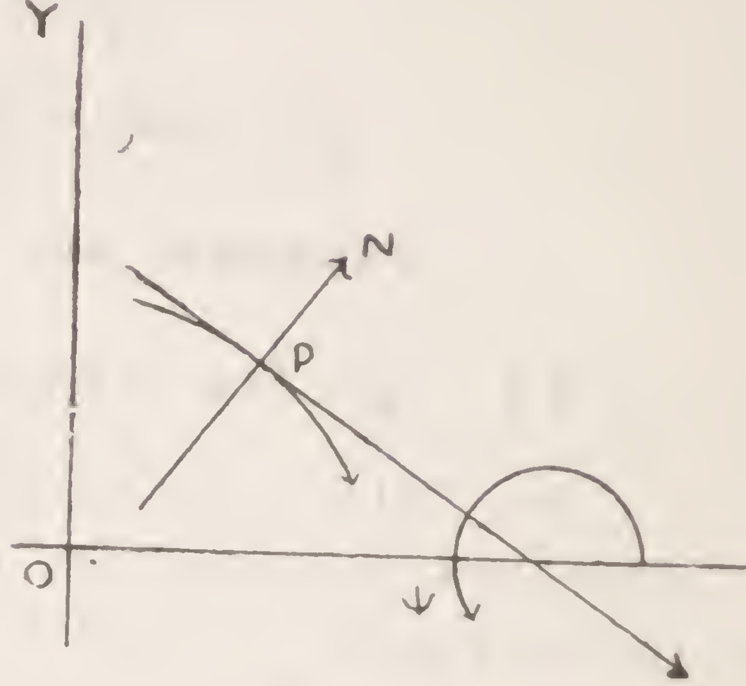
P ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು (slope) dy_1/dx_1 (§ 2.11). ಆದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1).$$

ಅನೇಕವೇಳೆ ನಾವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶೆಯನ್ನು (direction) ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ದಿಶೆಯು, ದತ್ತರೇಖೆಯು x ವರ್ಧಿಸುವಂತೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆಯೇ ಅಥವಾ x ಕ್ಷೀಣಿಸುವಂತೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸುತ್ತದೆ. ದತ್ತರೇಖೆಯು x ವರ್ಧಿಸುವಂತೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 7–1, 7–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ, x – ಅಕ್ಷದ ಧನದಿಶೆಯಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ

ದಿಶಿಯವರೆಗೆ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಅಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ψ ಎಂಬ ಕೋನವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋನ.





ಆಕೃತಿ 7-2

7.2. ಲಂಬರೇಖೆ (normal)

ದತ್ತರೇಖೆಗೆ P ಎಂಬ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ PN ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ದತ್ತಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು -1 ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ PN ಎಂಬ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು $-dx_1/dy_1$. .. PN ಎಂಬ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=-\frac{dx_1}{dy_1}(x-x_1).$$

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋನವು ψ ಆದರೆ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕೋನವು $\psi+90°$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ψ ಮತ್ತು $90°$ ಎಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಅಳೆಯತಕ್ಕದ್ದು. ದತ್ತರೇಖೆಯ

ಅನುಸರಣವು (tracing) x ವರ್ಧಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ, ಲಂಬರೇಖೆಯ ದಿಶಿಯು ಆಕೃತಿ 7–1, 7–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ; ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅನುಸರಣವು x ಕ್ಷೀಣಿಸುವಂತಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ದಿಶಿಗಳು ಆಕೃತಿ 7–1, 7–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ದಿಶಿಗಳಿಗೆ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ದತ್ತರೇಖೆಯು $f(x,y)=0$ ಎಂಬ ಧ್ವನಿತ (implicit) ರೂಪದಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $dy/dx=-f_x/f_y$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವನ್ನು (V, § 5·5) ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ವೇಳೆ ಸೌಲಭ್ಯವುಂಟು. ಆಗ $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}=0\,;$$

ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{x-x_1}{\partial f/\partial x_1}=\frac{y-y_1}{\partial f/\partial y_1}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y=x^2-5x+3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $x=2$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತಸಮೀಕರಣದಿಂದ $x=2$ ಆದಾಗ, $y=-5$.

$\therefore$ ದತ್ತಬಿಂದುವು $(2, -5)$. ಈಗ $dy/dx=2x-5$.

$\therefore$ $dy_1/dx_1=5$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y+5=5(x-2)$; ಎಂದರೆ, $5x-y-15=0$. ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯು $y+5=-\frac{1}{5}(x-2)$; ಎಂದರೆ, $x+5y+23=0$.

2. $x=at^2$, $y=2at$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ (parabola) t ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ t ಬಿಂದುವೆಂದರೆ $(at^2, 2at)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೆಂದರ್ಥ. ಈಗ ದತ್ತಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ $dy/dx = 1/t$. $\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

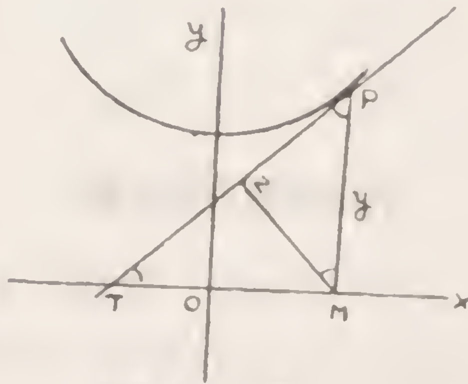
$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)\text{ ; ಎಂದರೆ, } x - ty + at^2 = 0.$$

ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯು $y - 2at = -t(x - at^2)$; ಎಂದರೆ,

$$y + tx = 2at + at^3.$$

3. $y = c$ ಕಾಷ್(x/c) ಎಂಬ ತಂತ್ರಿರೇಖೆಯಲ್ಲಿ(catenary) ಆರೂಢದ ಪಾದದಿಂದ (foot of the ordinate) ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬವು ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ MN ನ ಅಳತೆಯು (ಆಕೃತಿ 7-3) ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು



ಆಕೃತಿ 7-3

ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. $\angle PMT = 90^0 = \angle MNP$ ಆದ್ದರಿಂದ $PMN = MTP = \psi$. $\therefore$ $MN = y$ಕಾಸ್ψ. ಈಗ $dy/dx =$ ಸೈನ್ಎಚ್$(x/c) =$ ಟ್ಯಾನ್ ψ.

$\therefore$ ಕಾಸ್ $\psi =$ ಸೆಕ್ಎಚ್ (x/c). $\therefore$ $MN = c$.

4. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ಎಂಬ ಶಂಕುಭಾಗದಲ್ಲಿ (conic section) $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬುದೊಂದು

ದತ್ತಬಿಂದುವಾದರೆ, ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $f(x, y) = 0$ ಎಂಬ ಧ್ವನಿತರೂಪದಲ್ಲಿ ರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಟಿಪ್ಪಣಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$(x - x_1)(ax_1 + hy_1 + g) + (y - y_1)(hx_1 + by_1 + f) = 0$$

ಎಂದರೆ, $$axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಯು

$$\frac{x - x_1}{ax_1 + hy_1 + g} = \frac{y - y_1}{hx_1 + by_1 + f}$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

5. $$f(x, y) = (b_1x + b_2y) + (c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2) + (d_1x^3 + d_2x^2y + d_3xy^2 + d_4y^3) = 0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

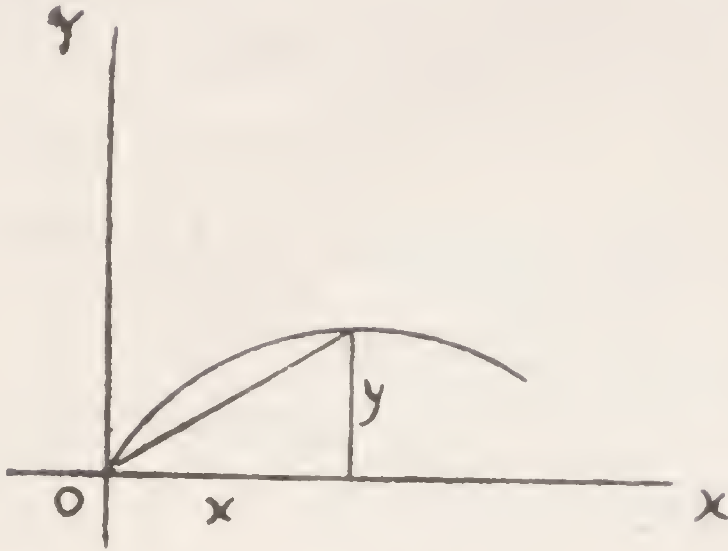
ಮೊದಲು, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ b_1, b_2 ಗಳೆರಡೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು m ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ (ಆಕೃತಿ 7–4)

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x \to 0} \frac{y}{x} = m. \qquad \dots \quad \text{(i)}$$

ಈಗ ದತ್ತಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$x\left(b_1 + b_2\frac{y}{x}\right) + x^2\left(c_1 + c_2\frac{y}{x} + c_3\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$+ x^3\left(d_1 + d_2\frac{y}{x} + d_3\frac{y^2}{x^2} + d_4\frac{y^3}{x^3}\right) = 0 \quad .... \quad \text{(ii)}$$



ಆಕೃತಿ 7-4

ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. ಇದನ್ನು x ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $x \to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, (i) ರಿಂದ

$$b_1 + b_2 m = 0.$$

$$\therefore \quad m = -\frac{b_1}{b_2}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$y = -\frac{b_1}{b_2}x\text{; ಎಂದರೆ, } \; b_1 x + b_2 y = 0$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಒಂದುವೇಳೆ $b_1 = 0 = b_2$ ಆಗಿ, c_1, c_2, c_3 ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಶೂನ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (ii)

$$x^2\left(c_1 + c_2\frac{y}{x} + c_3\frac{y^2}{x^2}\right) + x^3(\qquad) = 0.$$

ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು x^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $x \to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ

$$c_1 + c_2 m + c_3 m^2 = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ m ಗೆ m_1, m_2 ಎಂಬ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುವುದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಎಂದರೆ, ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಅಲ್ಲಿ ಎರಡು ಶಾಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವು

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0,$$

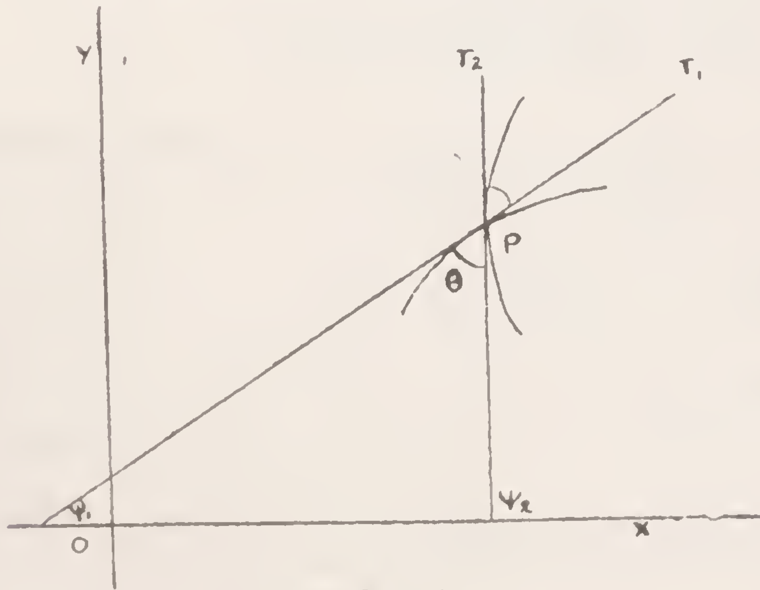
ಎಂದರೆ, $$y^2-(m_1+m_2)xy+m_1m_2x^2=0.$$
ಆದರೆ, $m_1+m_2=-c_2/c_3$, ಮತ್ತು $m_1m_2=c_1/c_3$.
ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವು

$$c_1x^2+c_2xy+c_3y^2=0$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ, ದತ್ತಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಘಾತದ ಪದಗಳ ಸಮಾಹಾರವನ್ನು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಫಲವನ್ನು ಅಂತರಣ ವಿಧಾನ ದಿಂದಲೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

7.3. ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನಕೋನ (angle of intersection of two curves).

$y=f(x)$ ಮತ್ತು $y=\phi(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PT_1, PT_2 ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ (ಆಕೃತಿ 7–5). ದತ್ತರೇಖೆಗಳು



ಆಕೃತಿ 7·5

P ಎಂಬಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಕೋನವೆಂದರೆ $\theta=\angle T_1PT_2$. ಈಗ PT_1 ಮತ್ತು PT_2 ರೇಖೆಗಳು OX ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ψ_1 ಮತ್ತು ψ_2 ಎಂಬ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\theta=\psi_2-\psi_1$

$$\therefore \text{ ಟ್ಯಾನ್ } \theta = \frac{\text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi_2 - \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi_1}{1 + \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi_2 \,\text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi_1}.$$

ಆದರೆ, ಟ್ಯಾನ್ $\psi_2 = \phi'(x_1)$ ಮತ್ತು ಟ್ಯಾನ್ $\psi_1 = f'(x_1)$.

$$\therefore \text{ ಟ್ಯಾನ್ } \theta = \frac{\phi'(x_1) - f'(x_1)}{1 + \phi'(x_1) f'(x_1)}.$$

$$\therefore \theta = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1} \frac{\phi'(x_1) - f'(x_1)}{1 + \phi'(x_1) f'(x_1)}.$$

$\theta = 90^\circ$ ಆದರೆ, ಆಗ ದತ್ತರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

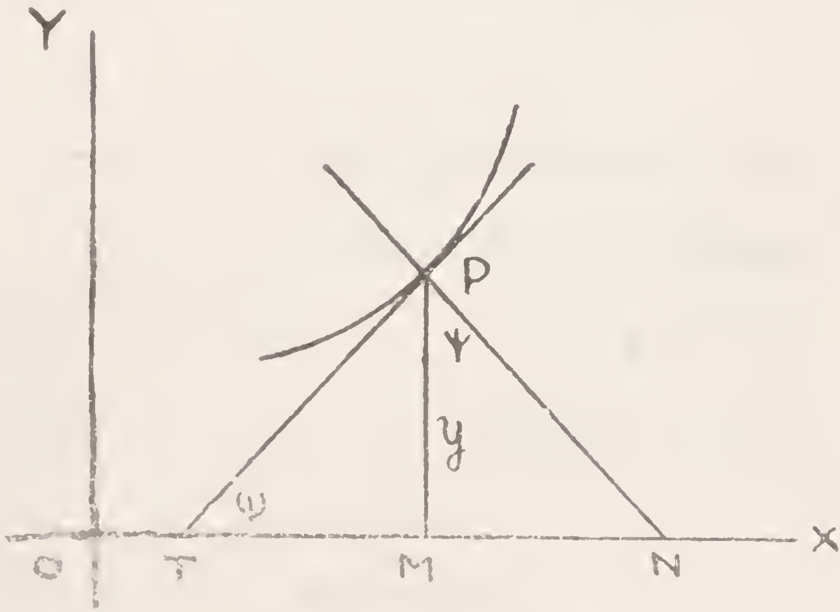
ಉದಾಹರಣೆ

$y^2 = x$ ಮತ್ತು $y^2 = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ?

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x, y ಗಳಿಗೆ ವಿಘಟಿಸುವುದರಿಂದ (ಬಿಡಿಸು, solve) ದತ್ತರೇಖೆಗಳು (1, 1) ಮತ್ತು (0, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $y^2 = x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $dy/dx = 1/(2\sqrt{x})$ ಮತ್ತು $y^2 = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $dy/dx = (3\sqrt{x})/2$. $\therefore$ (1, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳು $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{2}$. $\therefore$ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳು ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} =$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}4$ ಎಂಬ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೆ (0, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳು ∞ ಮತ್ತು 0. $\therefore$ ಅಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳು ಲಂಬದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

7.4. ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು. ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡ (lengths of tangent and normal. sub-tangent and subnormal).

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತರೇಖೆಯಮೇಲೆ $P(x, y)$ ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತಬಿಂದುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು T ಮತ್ತು N ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಆಕೃತಿ 7–6), ಮತ್ತು PM ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಆಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು PT ಎಂಬ ಖಂಡವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವೆಂದೂ (length of tangent), ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು x – ಅಕ್ಷದಮೇಲೆ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿಸುವುದರಿಂದ (project) ಲಭಿಸುವ TM ಎಂಬ ಖಂಡವು ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾ



ಆಕೃತಿ 7-6

ಖಂಡವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಲಂಬರೇಖೆಯ PN ಎಂಬ ಖಂಡವು ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವೆಂದೂ (length of normal) x – ಅಕ್ಷದಮೇಲೆ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡದ ಪ್ರಕ್ಷೇಪವಾದ MN ಎಂಬ

ಖಂಡವು ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. MP ಎಂಬ ಖಂಡವು P ಬಿಂದುವಿನ ಆರೂಢ (ordinate).

PM ಮತ್ತು PN ರೇಖೆಗಳು OX ಮತ್ತು PT ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle MPN =$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\, y'$.

ಈಗ $\triangle TMP$ ಇಂದ,

$\frac{TM}{MP} =$ ಕಾಟ್ ψ. $\therefore TM = MP$ ಕಾಟ್ $\psi = \frac{y}{y'}$.

ಮತ್ತೆ $\triangle NMP$ ಇಂದ,

$\frac{MN}{MP} =$ ಟ್ಯಾನ್ ψ. $\therefore MN = MP$ ಟ್ಯಾನ್ $\psi = yy'$.

ಅಲ್ಲದೆ ಶುಲ್ವಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ,

$$PT^2 = y^2 + \frac{y^2}{y'^2},\ \text{ಮತ್ತು}\ PN^2 = y^2 + y^2y'^2.$$

ಹೀಗೆ,

ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ $= y/y'$,

ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡ $= yy'$,

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ $= [y\sqrt{(1+y'^2)}]/y'$,

ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡ $= y\sqrt{(1+y'^2)}$.

ಉದಾಹರಣೆ

$y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $x = 3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ, ಅಧೀನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ, $x = 3$ ಆದಾಗ $y = 4$.

$\therefore$ ಪತ್ರಬಿಂದುವು (3, 4). ಅಲ್ಲದೆ $ay/ax = 3x^2 - 4x - 3$;

$\therefore$ $ay_1/ax_1 = 12$.

$\therefore$ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖಾಖಂಡ $= y/y^1 = \frac{1}{3}$,

ಅಧೀನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡ $= yy' = 48$,

ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖಾಖಂಡ $= [y\sqrt{(1+y'^2)}]/y' = (\sqrt{145})/3$,

ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡ $= y\sqrt{(1+y'^2)} = 4\sqrt{145}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7

1. $y = 2x^2 - 3x + 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $x = 2$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $y^2 = x^2(1-x)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಯು ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿವೆ?

3. $x = ct$, $y = c/t$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ (rectangular hyperbola) t ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. $xy = 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು $3x + 4y = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿವೆ?

5. $x^3 + y^3 = 3axy$ ಎಂಬ ಪತ್ರಲತೆಯ (folium) ಯಾವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು (i) $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ? (ii) $x + y + a = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ?

6. $$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

ಎಂಬ ಪತ್ರಲತೆಯಲ್ಲಿ (folium) $t, -t$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $-t^{-2}$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $ay^2 = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು OX, OY ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ?

8. $y^2 = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $\left(\frac{2}{9}, \pm\frac{2\sqrt{2}}{27}\right)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\left(\frac{8}{9}, \mp\frac{16\sqrt{2}}{27}\right)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $$x = a \text{ ಕಾಸ್}\,\theta + a\theta \text{ ಸೈನ್}\,\theta$$
$$y = a \text{ ಸೈನ್}\,\theta - a\theta \text{ ಕಾಸ್}\,\theta$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸಮದೂರದಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ (a ಕಾಸ್$^4\theta$, a ಸೈನ್$^4\theta$) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅಕ್ಷಖಂಡಗಳ (intercepts on OX, OY) ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯು (a, b) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯಲ್ಲಿ (astroid) OX, OY ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಗೆ (astroid) P ಎಂಬ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, P ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು $2r^2=a^2$ ಕಾಸ್$^2 2\theta$ (ಸಂಗತ $x=r$ ಕಾಸ್ θ, $y=r$ ಸೈನ್ θ) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $y=$ ಸೈನ್ x ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಸ್ಪರ್ಶಬಿಂದುಗಳು (points of contact) $x^2y^2=x^2-y^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಇರುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. $xy^n=a^{n+1}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು OX, OY ಅಕ್ಷಗಳಿಂದ ಆದ ತ್ರಿಕೋನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸ್ಥಿರಿಯಾಗಿರುವಂತೆ n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $x=a$ ಕಾಸ್$^3 t$, $y=b$ ಸೈನ್$^3 t$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ POP′ ಎಂಬ ವ್ಯಾಸವು (diameter) P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬ ರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದು, PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು OX, OY ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು M ಮತ್ತು N ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಆಗ MN ಖಂಡವು a, b ಗಳ ರೇಖಾ ಮಧ್ಯಮವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದೂ (geometric mean), ಮತ್ತು PP′ ಖಂಡವು a, b ಗಳ ಮೇಳ ಮಧ್ಯಮವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದೂ (harmonic mean) ತೋರಿಸಿ.

17. $x=t$, $y=at^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ t_1 ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ದತ್ತರೇಖೆಯನ್ನು t_2 ಎಂಬಲ್ಲಿ

ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ; t_2 ನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು t_3 ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ; ಇತ್ಯಾದಿ. ಹಾಗಾದರೆ, t_n ಎಂಬ ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿಯು (sequence) ಒಂದು ರೇಖಾ ಪ್ರಗಾಮಿ (geometric progression) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. $x = a(\theta - \text{ಸೈನ್}\,\theta)$, $y = a(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta)$ ಎಂಬ ಚಾಕ್ರೇಯದ (cycloid) θ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆರೂಢದ ಪಾದದಿಂದ (foot of the ordinate) ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

19. $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $ay^2 = 4x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು $(a, 2a)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಕೋನವು ಟ್ಯಾನ್$^{-1}\frac{1}{2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. $y^2 = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು $y = x$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲಿ, ಯಾವ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ, ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ?

21. $x^2 + 3y^2 = 3$ ಮತ್ತು $x^2 - y^2 = 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. $ax^2 + by^2 = 1$ ಮತ್ತು $a'x^2 + b'y^2 = 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b'}$$

ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಲಂಬದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

23. $y = x^3 + x + 1$ ಮತ್ತು $2y = x^3 + 5x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು $(1, 3)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

24. $y = e^x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವು ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

25. $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (parabola) ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಯೆಂದೂ, ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಹೊರತು ಇತರ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

26. $y^2 = x^3$ ಎಂಬ ಘನಾರ್ಧ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (semicubical parabola) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಹೊರತು ಇತರ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡದ ವರ್ಗವು ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡದಂತೆ ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆ (varies) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

27. $xy = c^2$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (rectangular hyperbola) ಅಧೀನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡವು ಆರೂಢದ ಘನದಂತೆ (cube of the ordinate) ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

28. $x^m y^n = a^{m+n}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವು ಕೋಟಿಯಂತೆ (ಅಪಛಿಂದ, abscissa) ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು (varies) ತೋರಿಸಿ.

29. $y = c$ಕಾಷ್(x/c) ಎಂಬ ತಂತ್ರೀ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ (catenary) ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವು (length of the normal) y^2/c ಎಂದು ತೋರಿಸಿ; ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (length of the tangent) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

30. $y^3 = a^2 x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡದ ಘನವು (cube) ವಿಲೋಮವಾಗಿ (inversely) ಕೋಟಿಯಂತೆ (ಅಪಚ್ಛಿತ, abscissa) ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು (varies) ತೋರಿಸಿ.

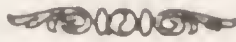
31. $x =$ ಲಾಗ್ ಟ್ಯಾನ್ $(\theta/2) +$ ಕಾಸ್θ, $y =$ ಸೈನ್θ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಸ್ಪರ್ಶ

ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳಿಂದ ಛೇದಿಸಲ್ಪಟ್ಟ x – ಅಕ್ಷದ ಖಂಡದಂತೆ ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

32. $y^{n+1} = a^n x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾ ಖಂಡದ $(n+1)$ ನೆಯ ಘಾತವು ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಕೋಟಿಯ (abscissa) $(n-1)$ ನೆಯ ಘಾತದಂತೆ ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

33. $y = a$ ಲಾಗ್$(a^2 - x^2)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಅಧೀನಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ (coordinates) ಗುಣಲಬ್ಧದಂತೆ ವಿಸ್ವಭಾವಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

34. n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ $xy^n = a^{n+1}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅಧೀನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡವು ಸ್ಥಿರ ಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ?



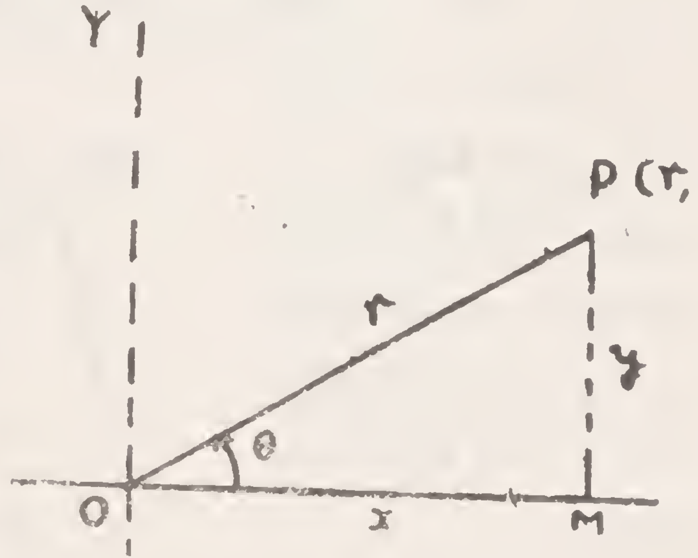
ಅಧ್ಯಾಯ VIII

ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳು
(systems of co ordinates)

8.1. ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು (cartesian coordinates) ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದರೆ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಇತರ ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಸೌಲಭ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗುವ ಧ್ರುವೀಯ (polar) ಮತ್ತು ಇತರ ಕೆಲವು ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

8.2. ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (polar coordinates).

ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (plane), O ಎಂಬುದೊಂದು ಮೂಲ ಬಿಂದು ಅಥವಾ ಧ್ರುವ (pole) ಮತ್ತು OX ಎಂಬುದೊಂದು ಮೂಲ ರೇಖೆ ಅಥವಾ ಆದಿರೇಖೆ (initial line) ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 8-1). ಆಗ ದತ್ತ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು $r = OP$ ಮತ್ತು $\theta = \angle XOP$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಬಹುದಷ್ಟೆ. OP ರೇಖೆಗೆ P ಬಿಂದುವಿನ ದಿಕ್‌ತ್ರಿಜ್ಯ (radius vector) ಎಂದೂ, $\angle XOP$ ಕೋನಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನ ದಿಕ್‌ಕೋನ (vectorial angle) ಎಂದೂ, ಮತ್ತು (r, θ) ಎಂಬ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಗೆ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದೂ ಹೆಸರು.



ಆಕೃತಿ 8-1

OY ಮತ್ತು PM ರೇಖೆಗಳನ್ನು OXಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದರೆ (ಆಕೃತಿ 8–1), ಆಗ OX, OY ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ, P ಬಿಂದುವಿನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು $x = \mathrm{OM}$ ಮತ್ತು $y = \mathrm{MP}$ ಆಗುತ್ತವೆಯಷ್ಟೆ? ಆದ್ದರಿಂದ ಧ್ರುವ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳು.

$$x = r \text{ ಕಾಸ್} \theta, \; y = r \text{ ಸೈನ್} \theta$$

ಅಥವಾ

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}, \; \theta = \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}(y/x)$$

ಎಂದು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

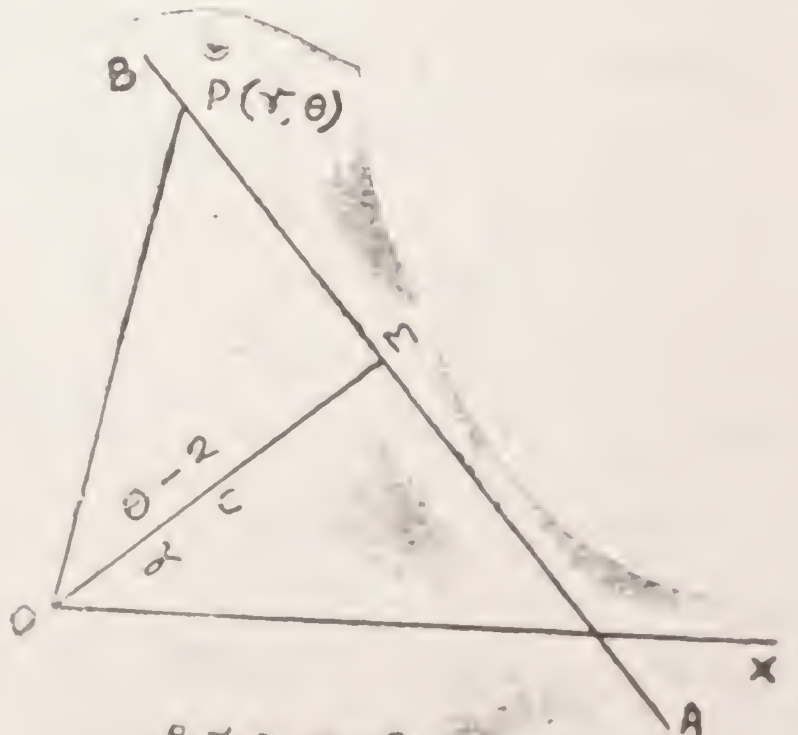
1. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$r \text{ ಕಾಸ್ } (\theta - \alpha) = c$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

AB ಎಂಬ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯಮೇಲೆ O ಎಂಬ ಧ್ರುವದಿಂದ OM ಎಂಬ ಲಂಬವು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. $\mathrm{OM} = c$ ಮತ್ತು $\angle \mathrm{XOM} = \alpha$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. AB ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P (r, θ) ಎಂಬ ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ

$\angle \mathrm{POM} = \theta - \alpha$ [ಅಥವಾ $(\alpha - \theta)$]. ಈಗ OMP ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

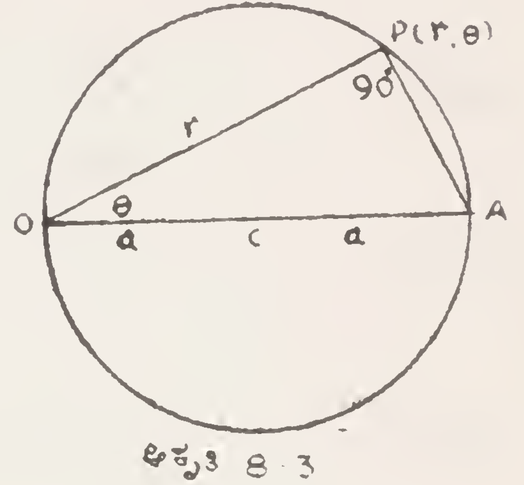


ಆಕೃತಿ 8–2

$$r \text{ ಕಾಸ್}(\theta - \alpha) = c.$$

2. ಕೇಂದ್ರ C ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ a ಉಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OCA ಎಂಬ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ, O ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ ವರ್ತುಳದ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣವು $r = 2a$ಕಾಸ್θ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ವರ್ತುಳದಮೇಲೆ $P(r, \theta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಚರಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 8–3). ಆಗ $\angle OPA = 90°$.



ಆಕೃತಿ 8·3

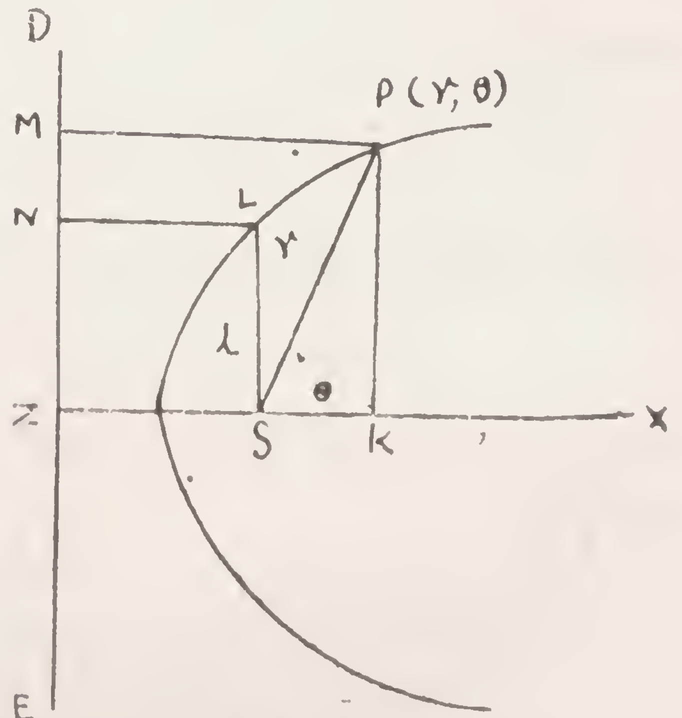
$\therefore$ OPA ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ $r = 2a$ ಕಾಸ್θ.

3. ಒಂದು ಶಂಕುಭಾಗಿನಿ ರೇಖೆಯ (conic section) ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$\frac{l}{r} = 1 - e \text{ ಕಾಸ್}\theta$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಶಂಕು ಭಾಗಿನಿಯ (focus) S, ದಿಕ್‌ಸ್ತಂಭವು (directrix) DE, ನಾಭಿ ವೈಶಾಲ್ಯವು (latus rectum) $2l$ ಮತ್ತು ಅತಿರೇಕವು (eccentricity) e ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 8–4). ನಾಭಿಯನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ, ನಾಭಿಗತ ಸಮಸಂಗತಾಕ್ಷ SX ನ್ನು (line



ಆಕೃತಿ 8-4

of symmetry) ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ದತ್ತ ಶಂಕುಭಾಗಿನಿಯಮೇಲೆ $P(r, \theta)$ ಎಂಬುದೊಂದು ಚರಬಿಂದುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಶಂಕುಭಾಗಿನಿಯ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ

$$SP = e \cdot PM$$
$$= e(ZS + SK)$$
$$= e(NL + r \text{ ಕಾಸ್}\theta)$$

ಆದರೆ $SL = e \cdot NL. \quad \therefore \; NL = l/e$

$\therefore$ $SP = e[(l/e) + r \text{ ಕಾಸ್}\theta]$

ಎಂದರೆ, $r = l + er \text{ ಕಾಸ್}\theta$

$$\therefore \quad r(1 - e \text{ ಕಾಸ್}\theta) = l$$

ಅಥವಾ $\dfrac{l}{r} = 1 - e \text{ ಕಾಸ್}\theta$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : (i) ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನು SZ ಎಂಬ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ θ ಗೆ ಬದಲು $180^\circ - \theta$ ಹಾಕಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ದತ್ತ ಶಂಕುಭಾಗಿನಿಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{l}{r} = 1 + e \text{ ಕಾಸ್}\theta$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

(ii) $e = 1$ ಮತ್ತು $l = 2a$ ಹಾಕಿದರೆ, $\dfrac{2a}{r} = 1 - \text{ಕಾಸ್}\theta$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪವು (parabola) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

4. $x^2 - y^2 = a^2$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿವಲಯದ (rectangular hyperbola) ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

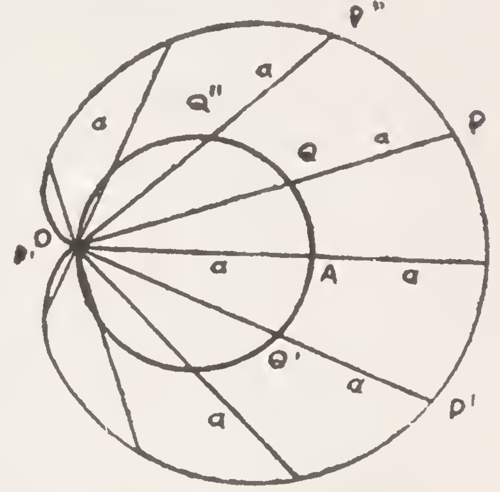
$x = r \text{ ಕಾಸ್}\theta$, $y = r \text{ ಸೈನ್}\theta$ ಹಾಕಿದರೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು

$$r^2 \text{ಕಾಸ್ } 2\theta = a^2$$

ಎಂಬ ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತದೆ.

5. $r=a(1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯ (cordioid) ವನ್ನು ರೇಖಿಸಿ.

ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಸುಲಭವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, a ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ (diameter) ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OA ಎಂಬ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನೆಳೆದು, O ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ OA ರೇಖೆಯನ್ನು ಮೂಲರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OQ ಎಂಬ ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ಎರಡುಕಡೆಗೂ ಲಂಬಿಸೋಣ. Q ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ a ಎಂಬ ಉದ್ದವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು OQ ಛೇದಕವನ್ನು P ಮತ್ತು P′ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸೋಣ. ಆಗ P ಮತ್ತು P′ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಹೃದ್ವಲಯದಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ,



ಆಕೃತಿ 8-5

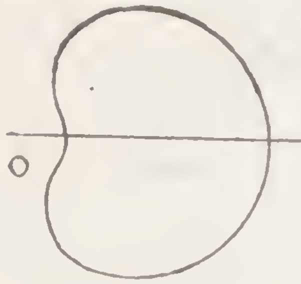
$$r=\text{OP}=\text{OQ}+\text{QP}=a\ \text{ಕಾಸ್}\,\theta+a=a(1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta).$$

P′ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಹೀಗೆಯೇ ಮತ್ತೆ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OQ′, OQ″ ಮುಂತಾದ ಇತರ ಛೇದಕಗಳನ್ನೆಳೆದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಛೇದಕದಿಂದಲೂ ಹೃದ್ವಲಯದ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ಲಭಿಸಿದ P, P′, . . . ಮುಂತಾದ ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಹಾಯುವಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದರೆ, ಅದು ಹೃದಯದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಹೃದ್ವಲಯವೆಂದು ಹೆಸರು.

ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನು AO ಎಂಬ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, θ ಗೆ ಬದಲು $180°-\theta$ ಹಾಕಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $r=a(1-\text{ಕಾಸ್}\,\theta)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

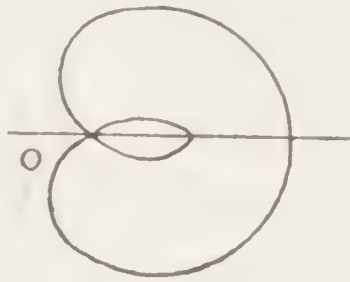
6. $r = a + b$ಕಾಸ್θ ಎಂಬ ಮಹೀಲತೆಯನ್ನು (limacon) ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆಕೃತಿ 8–5 ರಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸವನ್ನು a ಗೆ ಬದಲು b ಯನ್ನಾಗಿಯೂ, QP, Q′P′ ಮುಂತಾದ ಜಿದ್ದುಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನಂತೆ a ಯನ್ನಾಗಿಯೂ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ ಮಣ್ಣುಹುಳುವಿನ ಆಕಾರದ ಮಹೀಲತಾ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. $a = b$ ಆದಾಗ ಇದು ಹೃದ್ವಲಯವಾಗುತ್ತದೆ. $a > b$ ಮತ್ತು $a < b$ ಆದಾಗ, ಇದರ ಆಕಾರವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಕೃತಿ 8–6 ಮತ್ತು 8–7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. [(10), § 16·3 ನೋಡಿ.]



($a > b$)

ಆಕೃತಿ 8-6



($a < b$)

ಆಕೃತಿ 8-7

7. $r^2 = a^2$ ಕಾಸ್ 2θ ಎಂಬ ದ್ವೀಪದ್ವಯವನ್ನು (lemniscate) ಎಳೆಯಿರಿ.

θ ಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ತದನುಗುಣವಾದ r ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಈ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಬಹುದು. θ ದ ಬೆಲೆಗಳು $0°$ ಇಂದ $45°$ ಯ ವರೆಗೆ ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ r ನ ಬೆಲೆಗಳು a ಇಂದ 0ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತವೆ. ರೇಖೆಯು x – ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (symmetrical) ಅದರ ಆಕಾರವು ಆಕೃತಿ 8–8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇರುತ್ತವೆ. $\theta = \pm 45°$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಇದನ್ನು ಧ್ರುವದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವ. ಈ ಆಕಾರದ ಎರಡು ದ್ವೀಪಗಳ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಈ ರೇಖೆಗೆ ದ್ವೀಪದ್ವಯವೆಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ.

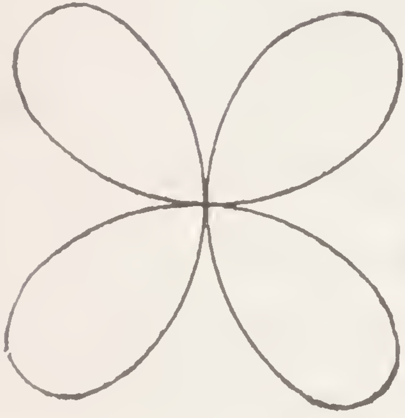


ಆಕೃತಿ 8-8

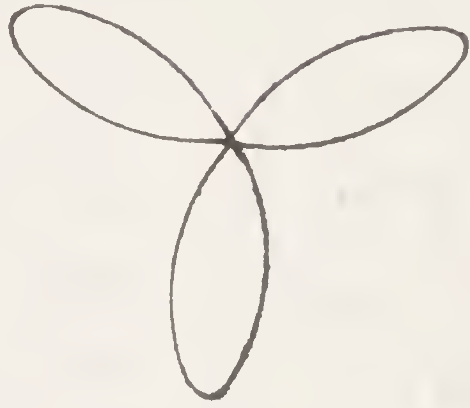
8. $r = a$ ಸೈನ್ 2θ, $r = a$ ಸೈನ್ 3θ ಎಂಬ ಪದ್ಮದಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ((rhodonae) ಎಳೆಯಿರಿ.

θಕ್ಕೆ ಬೇರೆಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು rನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದು ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನೆಳೆಯಬಹುದು.

$r = a$ ಸೈನ್ 2θ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ θ ದ ಬೆಲೆಗಳು $0°$ ಇಂದ $45°$ ಗೆ ಏರಿದಂತೆ r ನ ಬೆಲೆಗಳು O ಇಂದ a ಗೆ ಏರುತ್ತವೆ; ಮತ್ತು



ಆಕೃತಿ 8-9



ಆಕೃತಿ 8-10

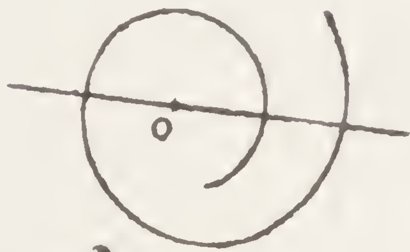
θ ದ ಬೆಲೆಗಳು $45°$ ಇಂದ $90°$ ವರೆಗೆ ಏರಿದಂತೆ r ನ ಬೆಲೆಗಳು a ಇಂದ 0 ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯು 1 ನೆಯ ಚಾಪದದಲ್ಲಿ (first quadrant) ಒಂದು ಸುಷಿರದ (loop) ಆಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. x – ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸಮಸಂಗತಿ (symmetry) ಇರುವುದರಿಂದ ರೇಖೆಯು ಆಕೃತಿ 8–9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ನಾಲ್ಕು ದಳಗಳುಳ್ಳ ಪದ್ಮದಂತಿದೆ.

$r = a$ ಸೈನ್ 3θ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅನುಸರಣವೂ (tracing) ಇದೇ ರೀತಿ. ಇದು ಆಕೃತಿ 8–10 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮೂರು ದಳಗಳುಳ್ಳ ಪದ್ಮದಂತಿದೆ.

ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಿ (generally), $r = a$ ಸೈನ್ $n\theta$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, ಎಂಬ ರೇಖೆಯು, n ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $2n$ ದಳಗಳನ್ನೂ, n ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ n ದಳಗಳನ್ನೂ ಉಳ್ಳ ಪದ್ಮದಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

9. $r = ae^{\theta \text{ ಕಾಟ್} \alpha}$ ಎಂಬ ಸಮಾನ ಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಯನ್ನು (equiangular spiral) ಎಳೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು α ಗಳು ಸ್ಥಿರಗಳು, ಮತ್ತು θ ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಮಾನದಲ್ಲಿದೆ (radian measure). θದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ rನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಈ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಬಹುದು. $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_1 + 2\pi$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ r ನ ಬೆಲೆಗಳು ಬೇರೆಬೇರೆಯಾಗಿರುತ್ತವೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ θ ದ ಬೆಲೆಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣ ಆವೃತ್ತಿಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತ ಹೋದಂತೆ, ರೇಖೆಯು ದುಂಬಿಯಂತೆ ಸುತ್ತುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 8–11). ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಗೆ ಪರಿಭ್ರಮಿ ಎಂದು ಹೆಸರು. ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ದಿಕ್‌ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಕೋನವು α ಎಂಬ ಸ್ಥಿರ (ಉದಾ. 2, § 8–21). ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪರಿಭ್ರಮಿಯು ಒಂದು ಸಮಾನ ಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿ.



ಆಕೃತಿ 8–11

8.21 ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಮತ್ತು ದಿಕ್‌ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಅಂತರ್ಗತಕೋನ (angle between tangent and radius vector)

$r = f(\theta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P (r, θ) ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 8–1) ದತ್ತರೇಖೆಗೆ P ಎಂಬಲ್ಲಿ PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು OP ಎಂಬ ದಿಕ್‌ತ್ರಿಜ್ಯದೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ OPT ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ϕ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ. ಈಗ ಈ ϕ ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ (i) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಂತರಣದಿಂದ,

$$dx = \text{ಕಾಸ್}\,\theta \cdot dr - r \text{ ಸೈನ್}\,\theta \, d\theta,$$

ಮತ್ತು $dy = \text{ಸೈನ್}\,\theta \cdot dr + r \text{ ಕಾಸ್}\,\theta \, d\theta$ .... (i)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\text{ಸೈನ್}\theta\ (dr/d\theta)+r\ \text{ಕಾಸ್}\theta}{\text{ಕಾಸ್}\theta\ (dr/d\theta)-r\ \text{ಸೈನ್}\theta} \quad \text{....} \quad \text{(ii)}$$

ಆಕೃತಿ 8–12

ಇದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು ಕಾಸ್θ. $(dr/d\theta)$ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{ಟ್ಯಾನ್}\theta+(rd\theta/dr)}{1-\text{ಟ್ಯಾನ್}\theta\ (rd\theta/dr)} \quad \text{....} \quad \text{(iii)}$$

ಇಲ್ಲಿ $rd\theta/dr=$ ಟ್ಯಾನ್ϕ' ಎಂದು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸೋಣ.

$dy/dx=$ ಟ್ಯಾನ್ψ ಆದ್ದರಿಂದ,

ಟ್ಯಾನ್$\psi=$ ಟ್ಯಾನ್ $(\theta+\phi')$

$\therefore \quad \psi=\theta+\phi'$

ಆದರೆ OPQ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ, $\psi=\theta+\phi$. $\quad \therefore \quad \phi'=\phi$

$\therefore \quad$ ಟ್ಯಾನ್$\phi=rd\theta/dr$

ಅಥವಾ $\quad \phi=$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}(rd\theta//dr)$ .... (iv)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $r=a\ (1+$ ಕಾಸ್$\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯದಲ್ಲಿ $\phi=90^\circ+(\theta/2)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{dr}{d\theta} = -a \text{ ಸೈನ್}\theta. \quad \therefore \ \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a\text{ ಸೈನ್}\theta}{a(1+\text{ ಕಾಸ್}\theta)}$$

ಎಂದರೆ, ಕಾಟ್ $\phi = -$ ಟ್ಯಾನ್ $(\theta/2) =$ ಕಾಟ್ $[90^\circ + (\theta/2)]$

$$\therefore \qquad \phi = 90^\circ + \frac{\theta}{2}.$$

2. $r = ae^{\theta\text{ ಕಾಟ್ }\alpha}$ ಎಂಬ ಸಮಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಯಲ್ಲಿ $\phi = \alpha$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{dr}{d\theta} = ae^{\theta\text{ ಕಾಟ್ }\alpha}.\text{ ಕಾಟ್ }\alpha = r\text{ ಕಾಟ್ }\alpha$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \text{ ಕಾಟ್ }\alpha. \quad \text{ಎಂದರೆ, ಕಾಟ್ }\phi = \text{ ಕಾಟ್ }\alpha$$

$$\therefore \qquad \phi = \alpha.$$

8.22 ಧ್ರುವದಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಪ್ರಮಾಣ (length of the perpendicular from the pole on the tangent)

O ಧ್ರುವದಿಂದ PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ OM ಎಂಬ ಲಂಬವು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ (ಆಕೃತಿ 8–12). OM = P ಆದರೆ, ಆಗ

$$p = r\text{ ಸೈನ್}\phi \qquad \ldots\ldots \qquad \text{(i)}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಕರವಾದ ಇತರ ರೂಪಗಳಿಗೆ ತಿರುಗಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, (i) ರಿಂದ,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}(1 + \text{ ಕಾಟ್}^2\phi)$$

ಆದರೆ. ಟ್ಯಾನ್ $\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$; $\therefore$ ಕಾಟ್$^2\phi = \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad \ldots\ldots \qquad \text{(ii)}$$

ಮತ್ತೆ $u=\frac{1}{r}$

ಆದರೆ, ಆಗ $\frac{du}{d\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}.$

$\therefore$(ii) ರಿಂದ, $\frac{1}{p^2}=u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ .... (iii)

ಉದಾಹರಣೆ

$\frac{2a}{r}=1+$ ಕಾಸ್θ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (parabola) $p=r$ಕಾಸ್$(\theta/2)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{-2a}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-\text{ಸೈನ್}\,\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\frac{r}{2a}\text{ಸೈನ್}\,\theta=\frac{\text{ಸೈನ್}\,\theta}{1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta}=\text{ಟ್ಯಾನ್}(\theta/2)$$

$$\therefore \quad \text{ಕಾಟ್}\,\phi=\text{ಕಾಟ್}[90-(\theta/2)].\quad \therefore \phi=90-(\theta/2)$$

$$\therefore \quad p=r\,\text{ಸೈನ್}\,\phi=r\,\text{ಕಾಸ್}(\theta/2)$$

8.23. ಧ್ರುವೀಯ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು; ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಅಧೀನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡಗಳು (lengths of polar tangent and polar normal; polar subtangent and polar subnormal).

ಧ್ರುವದಿಂದ OP ಎಂಬ ದಿಕ್‌ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ TON ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು T ಎಂಬಲ್ಲೂ, PN ಎಂಬ ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು N ಎಂಬಲ್ಲೂ ಛೇದಿಸಲಿ

(ಆಕೃತಿ 8 – 12). ಆಗ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PT ಮತ್ತು PN ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖಾ ಖಂಡಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಧ್ರುವೀಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ (length of polar tangent) ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಲಂಬರೇಖಾ ಖಂಡ (length of polar normal) ಎಂದು ಹೆಸರು ; TON ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇವುಗಳ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣಗಳಾದ (projections) OT ಮತ್ತು ON ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖಾಖಂಡಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾ ಖಂಡ (polar subtangent) ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡ (polar subnormal) ಎಂದು ಹೆಸರು.

POT ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ

$$OT = r\,\text{ಟ್ಯಾನ್}\,\phi = r^2\, d\theta/dr.$$

ಮತ್ತೆ PON ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ $PNO = OPT = \phi$ ಆದ್ದರಿಂದ

$$ON = r\,\text{ಕಾಟ್}\,\phi = dr/d\theta$$

ಅಲ್ಲದೆ, $PT^2 = OP^2 + OT^2$ ಮತ್ತು $PN^2 = OP^2 + ON^2$ ಆದ್ದರಿಂದ

$$PT = r\sqrt{[1 + (rd\theta/dr)^2]},$$

ಮತ್ತು $$PN = \sqrt{[r^2 + (dr/d\theta)^2]}$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : $$OT \cdot ON = r^2$$

ಉದಾಹರಣೆ

$r = ae^{\theta\,\text{ಕಾಟ್}\,a}$ ಎಂಬ ಸಮಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಯಲ್ಲಿ ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ, ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾ ಖಂಡ, ಧ್ರುವೀಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಲಂಬರೇಖಾ ಖಂಡಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

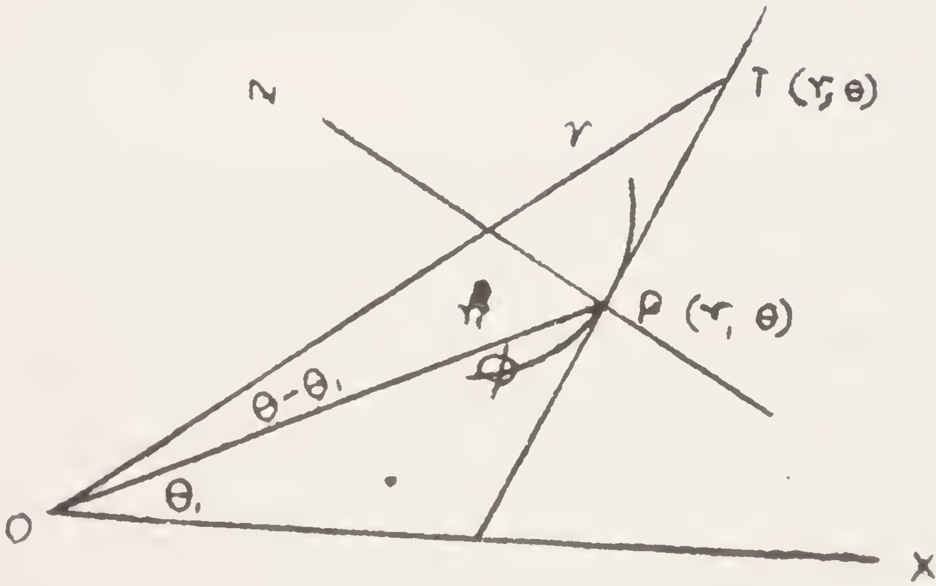
ಮೇಲಿನ ಸಂಕೇತದ ಪ್ರಕಾರ, $\phi = \alpha$ (ಉದಾ2, § 8.21);

$\therefore$ OT = rಟ್ಯಾನ್α, ON = rಕಾಟ್α

ಅಲ್ಲದೆ, PT = rಸೆಕ್α ಮತ್ತು PN = rಕೋಸೆಕ್α

8.24 ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು (polar equations of the tangent and normal)

$r = f(\theta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P (r_1, θ_1) ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವೆಂದೂ, PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ T (r, θ) ಎಂಬುದು ಚರ ಬಿಂದುವೆಂದೂ (ಪ್ರವಾಹಿ ಬಿಂದು, current point) ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 8 – 13). ಆಗ OPT ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ



ಆಕೃತಿ 8–13

$$\frac{\text{ಸೈನ್ } P}{r} = \frac{\text{ಸೈನ್ } T}{r_1}$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{\text{ಸೈನ್}\,\phi}{r} = \frac{\text{ಸೈನ್ } [\phi - (\theta - \theta_1)]}{r_1} \quad \text{.... (i)}$$

$$= \frac{1}{r_1} [\text{ಸೈನ್}\phi \ \text{ಕಾಸ್}(\theta - \theta_1) - \text{ಕಾಸ್}\phi \ \text{ಸೈನ್} \ (\theta - \theta_1)]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \ [\text{ಕಾಸ್}(\theta - \theta_1) - \text{ಕಾಟ್}\phi \ \text{ಸೈನ್} \ (\theta - \theta_1)]$$

ಆದರೆ, ಟ್ಯಾನ್$\phi = r_1 \, d\theta_1/dr_1$. ಆದ್ದರಿಂದ PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \ \text{ಕಾಸ್} \ (\theta - \theta_1) - \frac{1}{r_1^2} \frac{dr_1}{d\theta_1} \text{ಸೈನ್} \ (\theta - \theta_1),$$

ಅಥವಾ $u = \frac{1}{r}$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$u = u_1 \text{ಕಾಸ್}(\theta - \theta_1) + \frac{du_1}{d\theta_1} \text{ಸೈನ್}(\theta - \theta_1).$$

ಮತ್ತೆ, (i) ರಲ್ಲಿ ϕ ಗೆ ಬದಲು $90^\circ + \phi$ ಹಾಕಿದರೆ PN ಎಂಬ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \ \text{ಕಾಸ್} \ (\theta - \theta_1) + \frac{d\theta_1}{dr_1} \ \text{ಸೈನ್}(\theta - \theta_1)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ $u = 1/r$ ಹಾಕಿ, ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$u = u_1 \text{ಕಾಸ್}(\theta - \theta_1) - u_1^2 \frac{d\theta_1}{du_1} \text{ಸೈನ್}(\theta - \theta_1) \ \text{ಎಂಬ ರೂಪ}$$

ದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದಲೂ (§§7·1,7·2) ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $x = r$ ಕಾಸ್θ, $y = r$ ಸೈನ್θ, $x_1 = r_1$ ಕಾಸ್θ_1, $y_1 = r_1$ ಸೈನ್θ_1 ಹಾಕಿ, dy_1/dx_1ಗೆ (ii), § 8·21 ನ್ನು (r, θ ಗಳಿಗೆ ಬದಲು r_1, θ_1 ಹಾಕಿ) ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ

$r = 2a$ ಕಾಸ್ θ ಎಂಬ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ $\theta = \pi/3$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\theta_1 = \pi/3$; $\therefore$ $r_1 = a$, ಮತ್ತು $dr_1/d\theta_1 = -a\sqrt{3}$.

$\therefore$ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು r ಕಾಸ್ $(\theta - 120°) = a/2$; ಮತ್ತು ಲಂಬ ರೇಖೆಯು r ಕಾಸ್ $(\theta - 150°) = a\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)/2$.

8·3 ಕಂಸಾಂಶ (element of arc).

ಸಮತಲ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ (plane curves) ds ಎಂಬ ಕಂಸಾಂಶವು

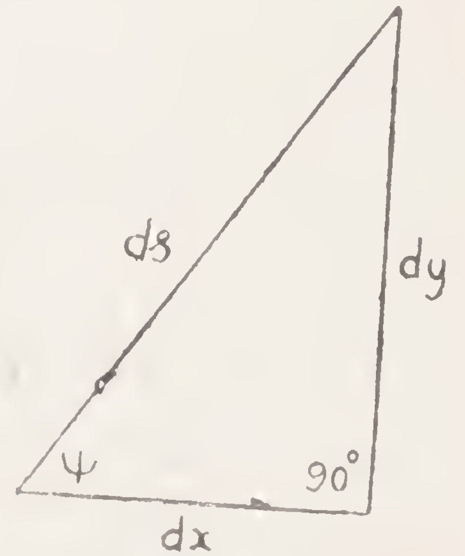
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad \text{....} \quad \text{(i)}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ (defined). ಇದರಿಂದ ನೇರವಾಗಿ

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \text{ಟ್ಯಾನ್}^2\psi,$$

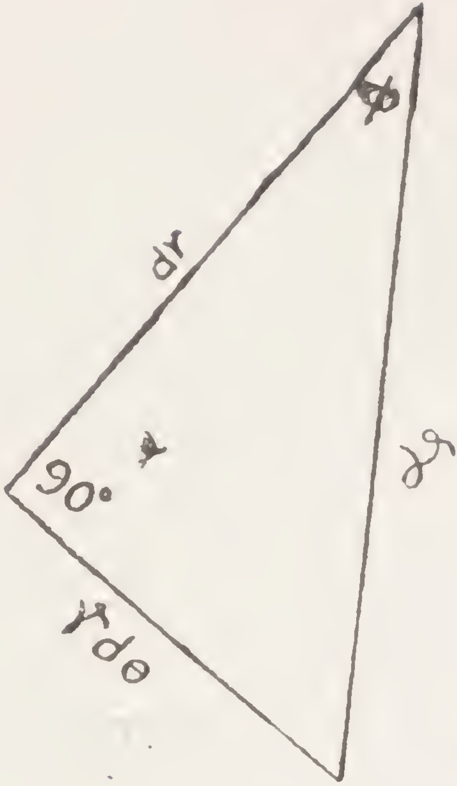
$$\frac{dx}{ds} = \text{ಕಾಸ್ } \psi, \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{dy}{ds} = \text{ಸೈನ್ } \psi$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. dx, dy ಮತ್ತು ds ಎಂಬ ಅಂತರಾಂಶಗಳ (differentials) ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಆಕೃತಿ 8–14 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 8-14

ಕಂಸಾಂಶವನ್ನು ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ (i) § 8·21 ರಲ್ಲಿ dx ಮತ್ತು dy ಗಳಿಗೆ ಪಡೆಯಲಾಗಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವರ್ಗಿಸಿ ಕೂಡಬೇಕು. ಆಗ



ಆಕೃತಿ 8-15

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 \quad .... \quad \text{(ii)}$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ನೇರವಾಗಿ

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2$$

$$= 1 + \text{ಟ್ಯಾನ್}^2\phi,$$

$$\frac{dr}{ds} = \text{ಕಾಸ್}\,\phi, \text{ ಮತ್ತು}$$

$$r\frac{d\theta}{ds} = \text{ಸೈನ್}\,\phi$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳು ಲಭಿಸುತ್ತವೆ. ds, dr ಮತ್ತು $rd\theta$ ಗಳ ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಆಕೃತಿ 8–15 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ

ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶಿಯೇ ಕಂಸದ ದಿಶಿ (direction of arc).

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{x}{a+x}}, \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{a}{a+x}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$y' = \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi = 2a/y$. ಇದರಿಂದ $dx/ds = \text{ಕಾಸ್}\,\psi$ ಮತ್ತು $dy/ds = \text{ಸೈನ್}\,\psi$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

2. $r = a + b\ \text{ಕಾಸ್}\,\theta$ ಎಂಬ ಮಹೀಲತೆಯಲ್ಲಿ (limacon) $ds = (a^2 + b^2 + 2ab\ \ \text{ಕಾಸ್}\,\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= (a + b \text{ ಕಾಸ್}\,\theta)^2 + b^2 \text{ ಸೈನ್}^2\theta, \text{ ಇತ್ಯಾದಿ.}$$

8·4. ಇತರ ಕೆಲವು ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳು (a few other coordinate systems).

ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ A ಎಂಬ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ P ಎಂಬ ಚರ ಬಿಂದುವಿನವರೆಗಿನ ಕಂಸವನ್ನು s ಎಂದೂ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ದಿಶಿಯು x-ಅಕ್ಷದ ಧನ **ದಿಶಿಯೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು** ψ ಎಂದೂ **ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.** ಆಗ ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು s ಮತ್ತು ψ ಗಳ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. **ಈ** ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ **ಅಂತರ್ಗುಣ** (intrinsic) ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ, (s, ψ) ಎಂಬ ಅಂಕಿಗಳಿಗೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರ್ಗುಣ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದೂ ಹೆಸರು. ಹೀಗೆಯೇ, ರೂಢ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ (§ 8.22), ಒಂದು ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು r ಗಳ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಆ ರೇಖೆಯ **ಪಾದೀಯ** (pedal) ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ, (p, r) ಎಂಬ ಅಂಕಿಗಳಿಗೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಪಾದೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದೂ ಹೆಸರು. ಮತ್ತೆ, ಒಂದು ರೇಖೆಯ $p - \psi$ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ **ಸ್ಪರ್ಶಧ್ರುವೀಯ** (tangential polar) ಸಂಬಂಧವೆಂದೂ (p, ψ) ಎಂಬ ಅಂಕಿಗಳಿಗೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಸ್ಪರ್ಶಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳೆಂದೂ ಹೆಸರು. ಕೆಲಕೆಲವು ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಕೆಲಕೆಲವು ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಸುಲಭ ರೂಪವನ್ನು ತಾಳುತ್ತವೆ. ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ನಿರ್ದೇಶಕ ಪ್ರಕ್ರಮಕ್ಕೆ ರೂಪಾಂತರಿಸಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳೂ ಒದಗುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $r^2 = a^2$ ಕಾಸ್ 2θ ಎಂಬ ದ್ವಿಪದ್ವಯದ (lemniscate) ಪಾದೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$r\frac{dr}{d\theta} = -a^2 \text{ ಸೈನ್ } 2\theta. \qquad \frac{1}{r}\ \frac{dr}{d\theta} = -\text{ಟ್ಯಾನ್ } 2\theta.$$

$\therefore$ ಕಾಟ್ $\phi =$ ಕಾಟ್ $(90^\circ + 2\theta)$. $\quad \therefore\ \phi = 90^\circ + 2\theta.$

ಈಗ $p = r$ ಸೈನ್ $\phi = r$ ಕಾಸ್ 2θ. ಆದರೆ ದತ್ತಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಕಾಸ್ $2\theta = r^2/a^2$. $\quad \therefore\ p = r^3/a^2$, ಅಥವಾ $r^3 = a^2p$.

2. $x = a\ (\theta -$ ಸೈನ್ $\theta)$, $y = a(1 -$ ಕಾಸ್ $\theta)$ ಎಂಬ ಚಾಕ್ರೀಯದಲ್ಲಿ (cycloid) $ds/d\psi = -4a$ ಕಾಸ್ ψ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಟ್ಯಾನ್ $\psi = dy/dx =$ ಕಾಟ್ $(\theta/2) =$ ಟ್ಯಾನ್ $[90^\circ - (\theta/2)]$

$\therefore \qquad \psi = 90^\circ - (\theta/2). \quad \therefore\ d\psi/d\theta = -\frac{1}{2}$ .... (i)

ಮತ್ತೆ, $dx/ds =$ ಕಾಸ್ $\psi =$ ಸೈನ್ $(\theta/2)$.

ಅಲ್ಲದೆ, $dx/d\theta = a(1 -$ ಕಾಸ್ $\theta) = 2a$ ಸೈನ್$^2(\theta/2)$.

$\therefore\quad ds/d\theta = (ds/dx)\cdot(dx/d\theta) = 2a$ ಸೈನ್ $(\theta/2)$ .... (ii)

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ, $ds/d\psi = (ds/d\theta)\cdot(d\theta/d\psi)$ $= -4a$ ಕಾಸ್ ψ.

3. $ax^2 + by^2 = 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ $p - \psi$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

x ಕಾಸ್ $\alpha + y$ ಸೈನ್ $\alpha = p$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತರೇಖೆಯನ್ನು (x_1, y_1) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $\alpha = \psi - 90^\circ$ ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ಕಾಸ್ $(\psi - 90^\circ) + y$ ಸೈನ್ $(\psi - 90^\circ) = p$, ಎಂದರೆ,

$$x\text{ಸೈನ್ }\psi - y\text{ ಕಾಸ್ }\psi = p.$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ದತ್ತರೇಖೆಗೆ (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು

$$axx_1 + byy_1 = 1$$

ಆಗಬೇಕು. ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ,

$$\frac{ax_1}{\text{ಸೈನ್}\,\psi} = \frac{by_1}{-\text{ಕಾಸ್}\,\psi} = \frac{1}{p}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\text{ಸೈನ್}\,\psi}{ap}, \text{ ಮತ್ತು } y_1 = \frac{-\text{ಕಾಸ್}\,\psi}{bp}.$$

ಆದರೆ ದತ್ತಸಮೀಕರಣದಿಂದ

$$ax_1^2 + by_1^2 = 1.$$

ಕೊನೆಯು ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x_1, y_1 ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ (eliminate),

$$abp^2 = a\,\text{ಕಾಸ್}^2\psi + b\ \text{ಸೈನ್}^2\psi$$

ಎಂಬ $p - \psi$ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8

1. ಒಂದು ಸಮತಲ ರೇಖೆಯ P (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದಿಕ್‌ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಅಂತರ್ಗತ ಕೋನವು ϕ ಆದರೆ,

$$\text{ಟ್ಯಾನ್}\,\phi = \frac{xy' - y}{x + yy'}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

2. $x = r$ ಕಾಸ್θ, ಮತ್ತು $y = r$ ಸೈನ್θ ಆದರೆ, ಆಗ

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2(dr/d\theta)^2-r(d^2r/d\theta^2)}{[-r\text{ಸೈನ್}\,\theta+(dr/d\theta)\text{ಕಾಸ್}\,\theta]^3}=\frac{-u^3[u+(d^2u/d\theta^2)]}{[u\text{ಸೈನ್}\,\theta+(du/d\theta)\text{ಕಾಸ್}\,\theta]^3}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. ರೂಢ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ, $\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}=u^2\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗಳ ϕ ಕೋನಗಳನ್ನೂ, $p-r$ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಿ:

ನಂ.	ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣ	ರೇಖೆಯ ಹೆಸರು	ϕ	$p-r$ ಸಂಬಂಧ
1.	$r\text{ಕಾಸ್}(\theta-\alpha)=c$	ಸರಳ ರೇಖೆ	$90^\circ-(\theta-\alpha)$	$p=c$
2.	$r=2a\text{ ಕಾಸ್}\,\theta$	ವರ್ತುಳ	$90^\circ+\theta$	$r^2=2ap$
3.	i) $\frac{2a}{r}=1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta$	ಪರಿಕ್ಷೇಪ (parabola)	i) $90^\circ-\frac{\theta}{2}$	
	ii) $\frac{2a}{r}=1-\text{ಕಾಸ್}\,\theta$		ii) $-\frac{\theta}{2}$	$p^2=ar$

4.	r^2ಕಾಸ್$2\theta = a^2$	ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪ (rectangular hyperbola)	$90^\circ - 2\theta$	$rp = a^2$
5.	i) $r = a(1 +$ ಕಾಸ್$\theta)$	ಹೃದ್ವಲಯ (cardioid)	i) $90^\circ + \frac{\theta}{2}$	$r^3 = 2ap^2$
	ii) $r = a(1 -$ ಕಾಸ್$\theta)$		ii) $\frac{\theta}{2}$	
6.	$r^2 = a^2$ಕಾಸ್2θ	ದ್ವಿಪದ್ವಯ (lemniscate)	$90^\circ + 2\theta$	$r^3 = a^2p$
7.	$r^m = a^m$ಸೈನ್$m\theta$		$m\theta$	$p = r$ ಸೈನ್α
8.	$r = ae^{\theta \text{ಕಾಟ್} \alpha}$	ಸಮಾನಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿ (equi-angular spiral)	α	$r^{m+1} = a^m p$

6. $$\frac{l}{r} = 1 + e \text{ ಕಾಸ್}\,\theta$$

ಎಂಬ ಶಂಕು ಭಾಗಿನಿಯ (conic section) $p-r$ ಸಮೀಕರಣವು

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{l}\left(\frac{2}{r} + \frac{e^2-1}{l}\right)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಎಂಬ ಉಪ್ಪಾಂಡದ (ellipse) $p-r$ ಸಮೀಕರಣವು

(i) ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು (centre) ಧ್ರುವವಾದಾಗ,

$$\frac{a^2b^2}{p^2} + r^2 = a^2 + b^2,$$

ಮತ್ತು (ii) ಒಂದು ನಾಭಿಯು (focus) ಧ್ರುವವಾದಾಗ,

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1,$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಎಂಬ ಅತಿಕ್ಷೇಪದ (hyperbola) $p-r$ ಸಮೀಕರಣವು

(i) ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು (centre) ಧ್ರುವವಾದಾಗ,

$$\frac{a^2b^2}{p^2} - r^2 = a^2 - b^2,$$

ಮತ್ತು (ii) ಒಂದು ನಾಭಿಯು (focus) ಧ್ರುವವಾದಾಗ,

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1,$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯ (astroid) ಪಾದೀಯ (pedal) ಸಮೀಕರಣವು ಎಂದು $r^3+3p^2=a^2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $$\frac{2a}{r}=1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta$$

ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ (parabola) $p-\psi$ ಸಂಬಂಧವು

$$p\ \text{ಸೈನ್}\,\psi=a$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $y=c\,\text{ಕಾಷ್}(x/c)$ ಎಂಬ ತಂತ್ರೀರೇಖೆಯಲ್ಲಿ (chainette) $ds=\text{ಸೆಕ್}^2\psi\ d\psi$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $s=\sqrt{(8\,ay)}$ ಎಂಬ ಚಾಕ್ರೇಯದ (cycloid) $s-\psi$ ಸಮೀಕರಣವು $s=4a$ ಸೈನ್ ψ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $$\frac{x+\sqrt{(a^2-y^2)}}{a}=\text{ಲಾಗ್}\,\frac{a+\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $y\ ds/dy$ ಸ್ಥಿರಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $r=a(1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯಕ್ಕೆ (cardioid) $\theta=\pi/3$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ಮತ್ತು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. $r=a(1+\cos\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯದ (cardioid) ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಆದಿರೇಖೆಗೆ (i) ಸಮಾನಾಂತರ ದಲ್ಲಿದೆ? (ii) ಲಂಬದಲ್ಲಿದೆ?

16. $r=a(1+\text{ಕಾಸ್}\,\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯಕ್ಕೆ (cardioid) ABCD ಎಂಬ ಆಯುವನ್ನು (ದೀರ್ಘ ಚತುರಸ್ರ, rectangle),

AB ಮತ್ತು CD ಎಂಬ ಬಾಹುಗಳು ಆದಿರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ, ಬಹಿರ್ಯೋಜಿಸಿದೆ (escribed). AB:BC = √3:2 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. $r = ae^{\theta \text{ ಕಾಟ್ } \alpha}$ ಎಂಬ ಸಮಾನ ಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಯಲ್ಲಿ (equi-angular spiral) ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡಗಳ (polar subtangent and polar subnormal) ಧಾರಣ ರಾಶಿಯು (ratio) ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣವುಳ್ಳದ್ದೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. r^2ಕಾಸ್ $2\theta = a^2$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (rectangular hyperbola) ಧ್ರುವೀಯ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖಾಖಂಡವು PT, ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡವು PN ಆದರೆ, PN:PT = ಟ್ಯಾನ್ 2θ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19.
$$\theta = \text{ಕಾಸ್}^{-1}\frac{r}{a} - \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}}{r}$$
ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು (polar subtangent and polar subnormal) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಧ್ರುವೀಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವು (polar tangent) ಸ್ಥಿರಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

20. ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವು (polar subtangent) t, ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ಅಧೀನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡವು (polar subnormal) n, ಆದರೆ, ಆಗ

i) $r^2 = 2\theta$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $t = nr^4$;

ii) $2a/r = 1 -$ ಕಾಸ್ θ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (parabola)
$$nt^3 = a^2(n+t)^2;$$

iii) $r = a(1 -$ ಕಾಸ್$\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯದಲ್ಲಿ (cardioid)

$$n(n+t)^2 = 4a^2t\ ;$$

iv) $r^2 = a^2$ ಕಾಸ್2θ ಎಂಬ ದ್ವಿಃಪದ್ವಯದಲ್ಲಿ (lemniscate)

$$r^4(n+t) = a^4t\ ;$$

v) $r = a$ ಸೈನ್$m\theta$ ಎಂಬ ಪದ್ಮದಲ್ಲಿ (rhodonae)

$$r^2(n+m^2t) = m^2a^2t$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ IX

ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಗಳು

(polar reciprocal curves)

9·1. ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಗಳ ನಿರೂಪಣೆಗೆ ಪೂರ್ವಭಾವಿಯಾಗಿ ಪಾದೀಯ (pedal), ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ (inverse) ರೇಖೆಗಳ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

9.2. ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಗಳು (pedal curves).

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ P ಎಂಬುದೊಂದು ಪ್ರಚಲಿತ (current) ಬಿಂದು, ಮತ್ತು ಆ ರೇಖೆಯ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (plane) A ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತಬಿಂದು ಆದರೆ, ಆಗ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಪಾದದ ಪಥವು (locus) A ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ದತ್ತರೇಖೆಯ **ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯರೇಖೆ** (first positive pedal) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು ದತ್ತರೇಖೆಯು ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯ **ಪ್ರಥಮ ಋಣ ಪಾದೀಯರೇಖೆ** (first negative pedal) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

A ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯು, ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ದ್ವಿತೀಯ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. nನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ (n^{th} order) ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಗಳ ನಿರೂಪಣೆಗಳೂ ಹೀಗೆಯೇ.

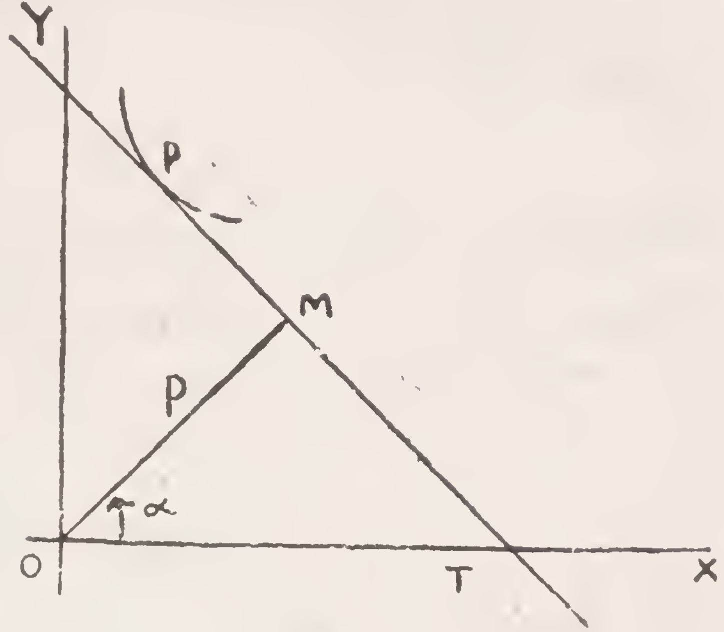
9·21 ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡು

ಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ (to find the first positive pedal, w.r.t. the origin, of a curve given in Cartesian coordinates).

ದತ್ತರೇಖೆಯು $y=f(x)$ ಆದರೆ, ಅದರ $p(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1).$$

ಎಂದರೆ,



ಆಕೃತಿ 9-1

$$x\frac{dy_1}{dx_1}-y+y_1-x_1\frac{dy_1}{dx_1}=0.$$

ಇದನ್ನು $\quad x$ ಕಾಸ್ $\alpha+y$ ಸೈನ್ $\alpha-p=0$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ. ಆಗ ಸದೃಶ ಪದಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ

$$\frac{\text{ಕಾಸ್}\,\alpha}{dy_1/dx_1}=\frac{\text{ಸೈನ್}\,\alpha}{-1}=\frac{p}{y_1-x_1(dy_1/dx_1)}.$$

ಅಲ್ಲದೆ, $\quad y_1=f(x_1).$

ಈ ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x_1, y_1 ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$p=\phi(\alpha)$$

ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈಗ PT ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬದ ಪಾದವು M ಆದರೆ, M ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (p, α) ಆದ್ದರಿಂದ $p=\phi(\alpha)$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ p ಗೆ ಬದಲು r, ಮತ್ತು α ಗೆ ಬದಲು θ ಬರೆಯುವುದರಿಂದ ಲಭಿಸುವ

$$r = \phi(\theta)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವೇ ವಾಂಛಿತ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣ.

ಹೀಗೆ, xಕಾಸ್$\alpha + y$ ಸೈನ್$\alpha = p$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಆ ನಿಬಂಧನೆಯಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು α ಗಳಿಗೆ ಬದಲು r ಮತ್ತು θ ಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, $x^2 - y^2 = a^2$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪದ (rectangular hyperbola) ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$x\text{ಕಾಸ್}\alpha + y \text{ ಸೈನ್}\alpha = p \qquad \text{.... (i)}$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು $p(x_1, y_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ p ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$xx_1 - yy_1 - a^2 = 0 \qquad \text{.... (ii).}$$

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಲ್ಲಿ ಸದೃಶ ಪದಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ

$$\frac{x_1}{\text{ಕಾಸ್}\alpha} = \frac{-y_1}{\text{ಸೈನ್}\alpha} = \frac{a^2}{p}.$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{a^2\text{ಕಾಸ್}\alpha}{p}, \text{ ಮತ್ತು } y_1 = \frac{-a^2\text{ಸೈನ್}\alpha}{p} \qquad \text{.... (iii)}$$

ಅಲ್ಲದೆ,

$$x_1^2 - y_1^2 = a^2 \qquad \text{.... (iv).}$$

(iii) ಮತ್ತು (iv) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x_1, y_1 ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

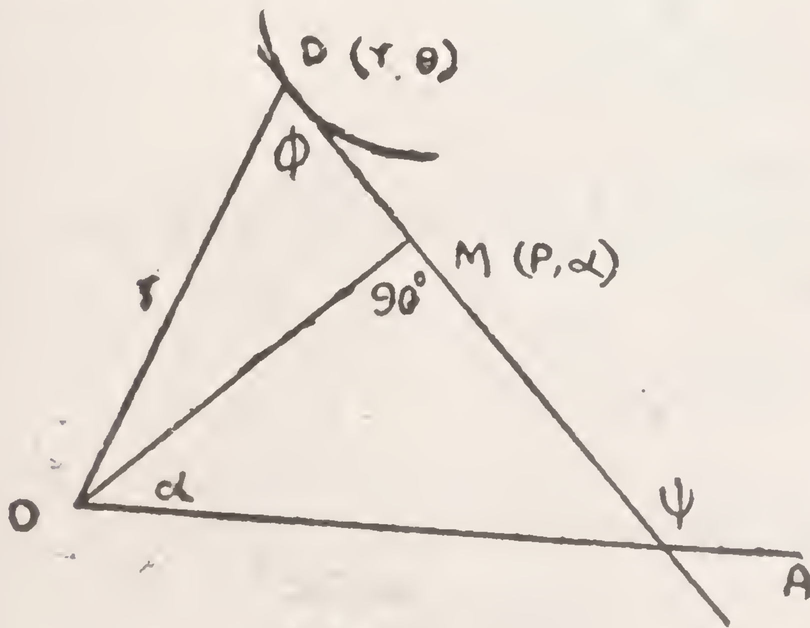
$$p^2 = a^2 \text{ಕಾಸ್}\, 2\alpha$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ p, α ಗಳಿಗೆ r, θ ಹಾಕಿದರೆ,

$$r^2 = a^2 \text{ಕಾಸ್}\, 2\theta$$

ಎಂಬ ದ್ವಿಪದ್ವಯುವು (lemniscate) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆ.

9.22. ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ (to find the first positive pedal w.r.t. the pole, of a curve given in polar coordinates).



ಆಕೃತಿ 9-2

ದತ್ತರೇಖೆಯು

$$r = f(\theta)$$

ಆದರೆ,

ಆಗ ಆಕೃತಿ 9-2 ರಿಂದ

$$\alpha = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}.$$

ಅಲ್ಲದೆ,

$$\text{ಟ್ಯಾನ್}\,\phi = r\frac{d\theta}{r'},$$

ಮತ್ತು $$p = r \text{ ಸೈನ್}\, \phi.$$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ r, θ ಮತ್ತು ϕ ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$p = g(\alpha)$$

ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ p, α ಗಳಿಗೆ ಬದಲು r, θ ಹಾಕಿದರೆ ಲಭಿಸುವ

$$r = g(\theta)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ.

ಉದಾಹರಣೆ

ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ,

$$r^m = a^m \text{ಕಾಸ್}\, m\theta \qquad \ldots \quad (i)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ; ಮತ್ತು k ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ (k^{th} order) ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯೂಹಿಸಿ (deduce).

$$\phi = \frac{\pi}{2} + m\theta$$

$$\alpha = \theta + \phi - \frac{\pi}{2} = (m+1)\theta. \quad \therefore \ \theta = \frac{\alpha}{m+1}.$$

$$\therefore \quad m\theta = \frac{m}{m+1}\alpha.$$

$$p = r \text{ ಸೈನ್}\, \phi = r \text{ ಕಾಸ್}\, m\theta = a \text{ ಕಾಸ್}^{\frac{1}{m}} m\theta \text{ ಕಾಸ್}\, m\theta$$

$$= a \text{ ಕಾಸ್}^{\frac{m+1}{m}} m\theta = a \text{ ಕಾಸ್}^{\frac{m+1}{m}} \left(\frac{m}{m+1}\alpha\right)$$

$$\therefore \qquad p^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \text{ ಕಾಸ್} \frac{m}{m+1}\alpha$$

∴ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯು

$$r^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}} \text{ ಕಾಸ್} \frac{m}{m+1}\theta.$$

ಎಂದರೆ. $$r^{m_1} = a^{m_1} \text{ ಕಾಸ್} m_1\theta, \text{ ಸಂಗತ } m_1 = \frac{m}{1+m}.$$

ಹೀಗೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ m ಗೆ ಬದಲು $m_1 = m/(1+m)$ ಹಾಕಿದರೆ, ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದ್ವಿತೀಯ ಧನ ಪಾದೀಯವು

$$r^{m_2} = a^{m} \text{ ಕಾಸ್} m_2\theta,$$

ಸಂಗತ $$m_2 = \frac{m_1}{1+m_1} = \frac{m}{1+2m}.$$

ಹೀಗೆಯೇ k ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಧನ ಪಾದೀಯವು

$$r^{m_k} = a^{m_k} \text{ ಕಾಸ್ } m_k\theta \qquad \dots \quad \text{(ii)}$$

ಸಂಗತ $$m_k = \frac{m}{1+km}.$$

ಈಗ ರೇಖೆ (ii) ನ್ನು ಮೂಲ ರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅದರ k ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಋಣ ಪಾದೀಯವು (i) ಆಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ m_k ಮತ್ತು m ಗಳ ಸಂಬಂಧದಿಂದ

$$m = \frac{m_k}{1-km_k}$$

∴ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ k ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಋಣಪಾದೀಯವು

$$r^{m_k} = a^{m_k} \text{ ಕಾಸ್ } m_k\theta,$$

ಸಂಗತ $$m_k = \frac{m}{1-km}$$

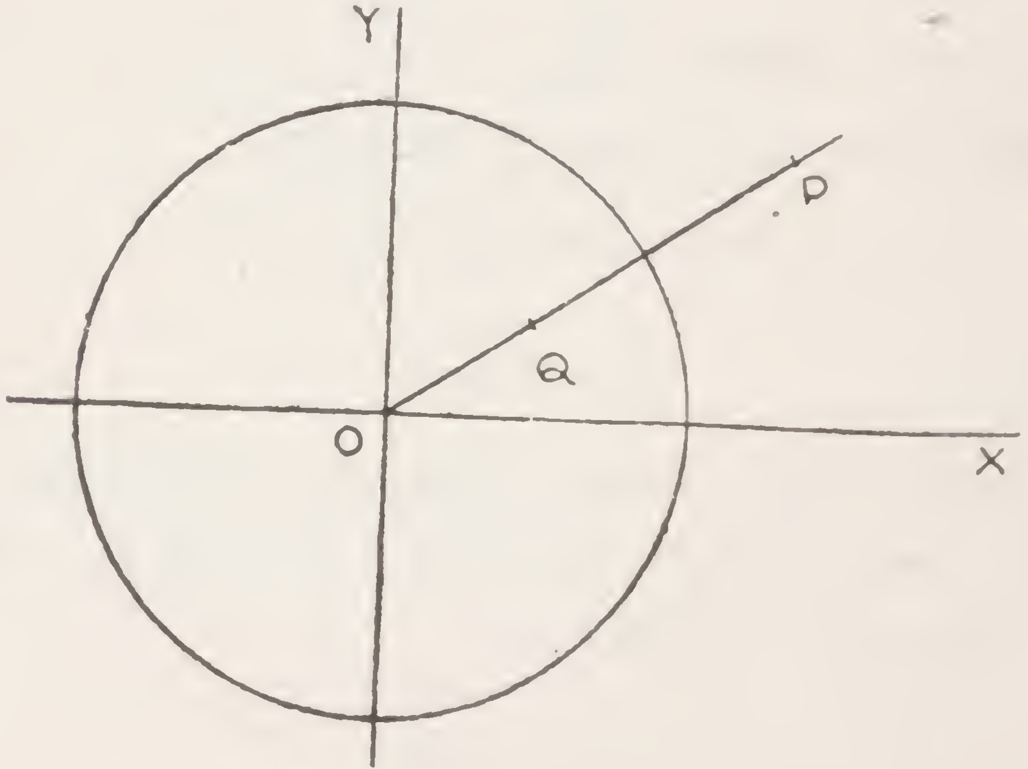
ಆದ್ದರಿಂದ k ಧನವಾದಾಗಲೂ, ಋಣವಾದಾಗಲೂ k ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಪಾದೀಯದ ಸಮೀಕರಣವು ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ (ii).

9.3. ವರ್ತುಳೀಯ ವಿಲೋಮನ (inversion w.r.t. a circle).

ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ O, ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ K ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆ ವರ್ತುಳದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ $P(x, y)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ OP ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ

$$OP \cdot OQ = K^2 \qquad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

ಆಗುವಂತೆ ಇರುವ Q ಎಂಬ ಬಿಂದುವು, ದತ್ತ ವರ್ತುಳವನು ಗೌರವಿಸಿ, P ಬಿಂದುವಿನ **ವಿಲೋಮ ಬಿಂದುವೆಂದು** (inverse



ಆಕೃತಿ 9-3

point) ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 9–3). ಅಲ್ಲದೆ O ಬಿಂದುವು ವಿಲೋಮನ ಕೇಂದ್ರವೆಂದೂ (centre of inversion), K^2 ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯು ವಿಲೋಮನ ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದೂ (constant of inversion), ದತ್ತವರ್ತುಳವು ವಿಲೋಮನ ವರ್ತುಳವೆಂದೂ (circle of inversion) ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಸಮೀಕರಣ (i) ರಲ್ಲಿ P, Q ಗಳ ಪರಸ್ಪರ ವಿನಿಮಯದಿಂದ ಸಮೀಕರಣವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವಿನ ವಿಲೋಮವು Q ಆದರೆ, Q ಬಿಂದುವಿನ ವಿಲೋಮವು P ಆಗುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ವಿಲೋಮನ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರವಾದ O ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ OX, OY ಎಂಬ ಎರಡು ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವು $x^2+y^2=k^2$ ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಈಗ P ಬಿಂದುವು (x, y) ಆದರೆ, Q ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. Q ಬಿಂದುವು (x', y') ಆದರೆ, ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (i) ರಿಂದ,

$$(x^2+y^2)\cdot(x'^2+y'^2)=k^4.$$

ಅಲ್ಲದೆ, O, P, Q ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ರುವುದರಿಂದ

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}.$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x' ಮತ್ತು y' ಗಳಿಗೆ ವಿಘಟಿಸಿದರೆ (ಬಿಡಿಸು, solve),

$$x'=\frac{k^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{k^2y}{x^2+y^2}.$$

ಈಗ, P ಬಿಂದುವು

$$f(x, y)=0$$

ಎಂಬ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ತದನುಸಾರವಾಗಿ, Q ಬಿಂದುವು

$$f\left(\frac{k^2x}{x^2+y^2},\ \frac{k^2y}{x^2+y^2}\right)=0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ವರ್ತುಳವನು ಗೌರವಿಸಿ, P ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ವಿಲೋಮರೇಖೆ. P, Q ಬಿಂದುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮ ಬಿಂದುಗಳಾದ್ದರಿಂದ, Q ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ

ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯು P ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು, ದತ್ತ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಗಳು.

ಮತ್ತೆ, ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ P(r, θ) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು

$$\phi(r, \theta) = 0$$

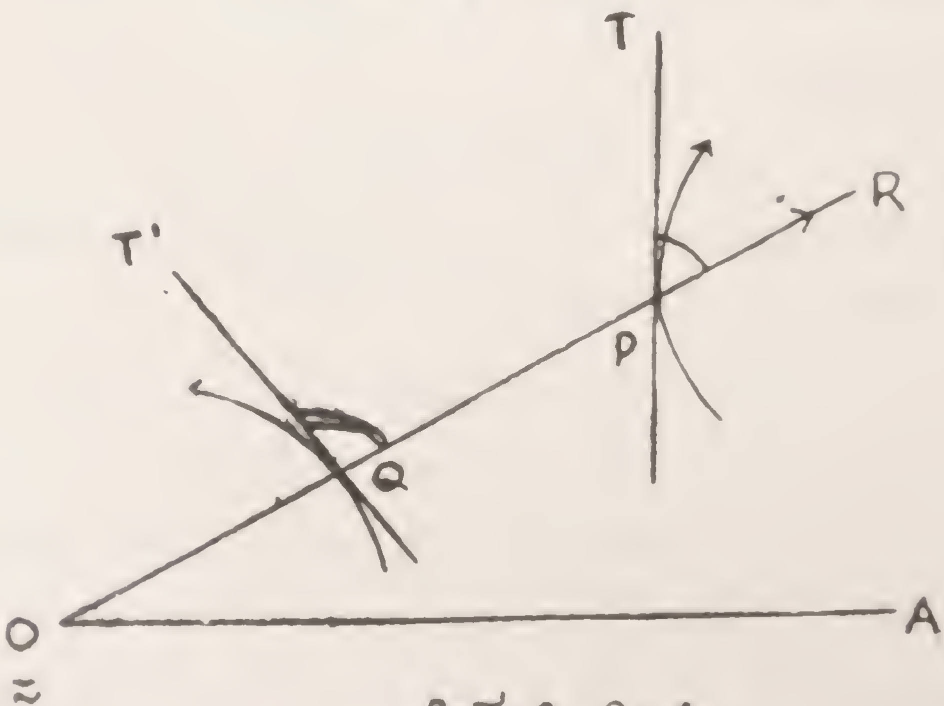
ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, Q ಬಿಂದುವು

$$\phi\left(\frac{k^2}{r}, \theta\right) = 0.$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ವರ್ತುಳೀಯ ವಿಲೋಮನದಲ್ಲಿ, ಪರಸ್ಪರ ವಿಲೋಮಗಳಾಗಿರುವ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಅನುಗುಣ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ (corresponding points) ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ದಿಕ್ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ (radius vector) ಸರಳಪೂರಕ (supplementary) ಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

P, Q ಬಿಂದುಗಳು ವಿಲೋಮ ಬಿಂದುಗಳೆಂದೂ, P ಬಿಂದುವು $r = f(\theta)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ.



ಆಕೃತಿ 9-4

ಆಗ Q ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು $(k^2/r)=f(\theta)$.

ಈಗ $\angle TPR=\phi$, ಮತ್ತು $T'QR'=\phi'$ ಆದರೆ (ಆಕೃತಿ 9–4). $\phi+\phi'=180^\circ$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. $r=f(\theta)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ,

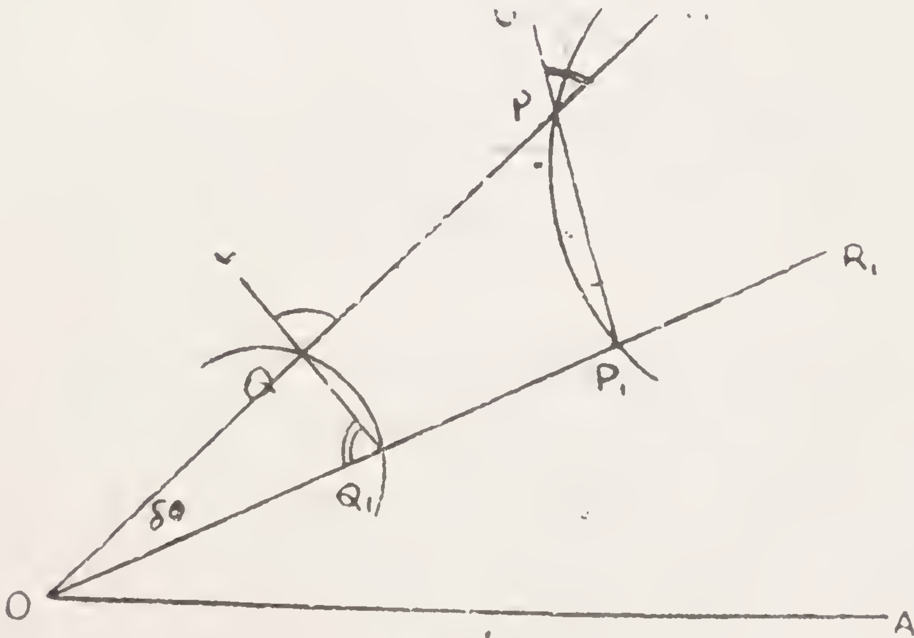
$$\frac{dr}{d\theta}=f'(\theta)\,; \quad \therefore \text{ ಕಾಟ್ }\phi=\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}=\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}.$$

ಮತ್ತೆ, $(k^2/r)=f(\theta)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ,

$$\frac{dr}{d\theta}=-k^2\frac{f'(\theta)}{[f(\theta)]^2}\,; \quad \therefore \text{ ಕಾಟ್ }\phi'=-\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}.$$

$$\therefore \quad \text{ಕಾಟ್ }\phi'=-\text{ ಕಾಟ್ }\phi\,; \quad \therefore \phi'=180^\circ-\phi.$$

ಈ ಫಲವನ್ನು ಜಾಮಿತೀಯ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಆಕೃತಿ 9–5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ದತ್ತ ವಿಲೋಮ

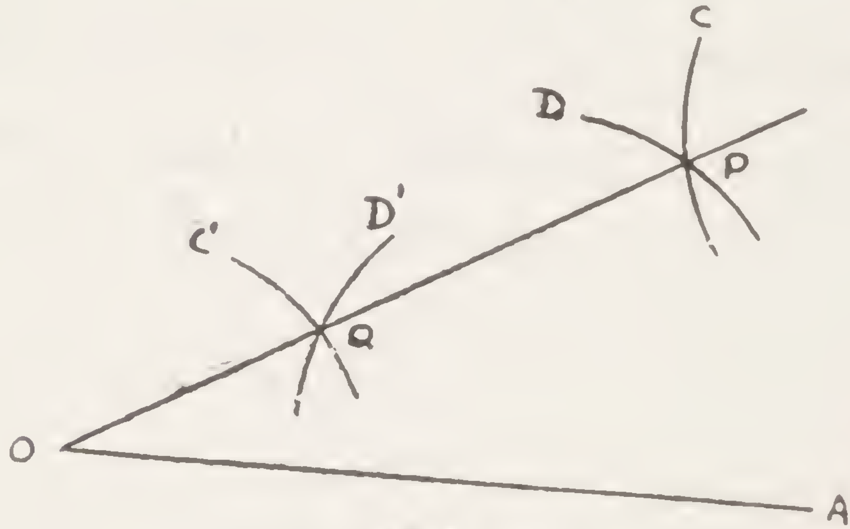


ಆಕೃತಿ 9 5

ರೇಖೆಗಳಿಗೆ P_1P, Q_1Q ಎಂಬ ಛೇದಕಗಳನ್ನು (secants) ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $OP\cdot OQ=OP_1\cdot OQ_1(=k^2)$. ಆದ್ದರಿಂದ P_1PQQ_1 ಎಂಬ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚಕ್ರೀಯವಾದುದು (cyclic).

$\angle UPR = \alpha$, ಮತ್ತು $P_1OP = \delta\theta$ ಆದರೆ, ಆಗ $\angle VQP = 180^\circ - \alpha - \delta\theta$. ಈಗ $\delta\theta \to 0$ ಆದಂತೆ, $\alpha \to \phi$ ಆದರೆ, $\angle VQP \to 180^\circ - \phi$; ಅಲ್ಲದೆ, P_1P, Q_1Q ಎಂಬ ಛೇದಕಗಳು P, Q ಎಂಬಲ್ಲಿ ಆಯಾ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ, ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಕೋನವು (angle of intersection) ವರ್ತುಳೀಯ ವಿಲೋಮನದಿಂದ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಫಲವು ಮೇಲಿನ ಫಲದಿಂದ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, C, D ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು p ಎಂಬಲ್ಲಿ r ಎಂಬ ಕೋನದಲ್ಲಿ



ಆಕೃತಿ 9-೬

ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸಿದರೆ, C, D ಗಳ ವಿಲೋಮಗಳಾದ C′, D′ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನ ವಿಲೋಮವಾದ Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದೇ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. (ಆಕೃತಿ 9-6). ಏಕೆಂದರೆ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ C, D ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು OP ಎಂಬ ದಿಕ್ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ α, β ಕೋನಗಳಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $\gamma = \beta - \alpha$. P ಬಿಂದುವು C, D ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೂ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ವಿಲೋಮವಾದ Q ಬಿಂದುವು C′, D′ ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೂ ಇರಬೇಕು ; ಎಂದರೆ, C′, D′ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಅಲ್ಲದೆ, C′, D′ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು

ದಿಕ್ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದನ ಕೋನವು

$$(180^\circ-\alpha)-(180^\circ-\beta)=\beta-\alpha=\gamma.$$

ಉದಾಹರಣೆ

ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯು (i) ವಿಲೋಮನ ಕೇಂದ್ರವು ಆ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ವರ್ತುಳವಾಗುತ್ತದೆ; (ii) ವಿಲೋಮನ ಕೇಂದ್ರವು ಆ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಲೋಮನ ಕೇಂದ್ರವು ಮೂಲ ಬಿಂದುವೆಂದೂ, ವಿಲೋಮನ ಸ್ಥಿರಿಯು k^2 ಎಂದೂ, ದತ್ತ ವರ್ತುಳವು

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

ಎಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x, y ಗಳಿಗೆ ಬದಲು $k^2x/(x^2+y^2)$ ಮತ್ತು $k^2y/(x^2+y^2)$ ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ (substitute), ಆಗ

$$c(x^2+y^2)+2gk^2x+2fk^2y+k^4=0$$

ಎಂಬ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $c\neq0$ ಆದರೆ, ಇದೊಂದು ವರ್ತುಳ; ಮತ್ತು $c=0$ ಆದರೆ ಇದೊಂದು ಸರಳ ರೇಖೆ.

9·4. ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರರೇಖೆಗಳು (polar reciprocals).

ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ಒಂದು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯ ವರ್ತುಳೀಯ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಅಲ್ಲದೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ಶಂಕುಭಾಗಿಸಿಯ (conic) ಗೌರವಕ್ಕೆ, ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಧ್ರುವಬಿಂದುವಿನ (pole) ಪಥವು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, $x^2-y^2=a^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರಥಮ ಧನಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯು $r^2=a^2$ ಕಾಸ್ 2θ (ಉದಾ, § 9·21); ಇದರ ವರ್ತುಳೀಯ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯು ಎಂದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯು

$$(k^4/r^2)=a^2 \text{ ಕಾಸ್ } 2\theta.$$

2. $x^2-y^2=a^2$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪದ ಗೌರವಕ್ಕೆ $x^2+y^2-ax=0$ ಎಂಬ ವರ್ತುಳದ ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ (x_1, y_1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$xx_1+yy_1-\frac{a}{2}(x+x_1)=0 \qquad \text{....} \quad \text{(i)}$$

ದತ್ತ ಅತಿಕ್ಷೇಪದ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಧ್ರುವ ಬಿಂದುವು (pole) (x_2, y_2) ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಧ್ರುವೀಯ ರೇಖೆಯು (polar)

$$xx_2-yy_2-a^2=0. \qquad \text{....} \quad \text{(ii)}$$

ಈಗ (i) ಮತ್ತು (ii) ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, ಸದೃಶ ಪದಗಳ ಹೋಲಿಕೆಯಿಂದ

$$\frac{2x_1-a}{x_2}=\frac{2y_1}{-y_2}=\frac{x_1}{a}.$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{a^2}{2a - x_2}, \; y_1 = \frac{-ay_2}{2(2a - x_2)}$$

ಅಲ್ಲದೆ, $x_1{}^2 + y_1{}^2 - ax_1 = 0$

ಕೊನೆಯು ಈ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x_1, y_1 ಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, $y_2{}^2 = -4a(x_2 - a)$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (x_2, y_2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು, ಎಂದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯು

$$y^2 = -4a(x - a)$$

ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪ (parabola).

ಅಭ್ಯಾಸ 9

1. ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರಥಮ ಪಾದೀಯಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ:

$$\text{(i)}\; y^2 = 4ax\,; \quad \text{(ii)}\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,;$$

$$\text{(iii)}\; x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

2. ನಾಭಿಯನ್ನು (focus) ಗೌರವಿಸಿ

$$\frac{2a}{r} = 1 + \text{ಕಾಸ್}\ \theta$$

ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ (parabola) ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಸಮತಲದಲ್ಲಿ (plane) ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ಆ ವರ್ತುಳದ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯವು ಒಂದು ಮಹೀಲತೆ (limacon) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ; ಅಲ್ಲದೆ, ದತ್ತಬಿಂದುವು

ಆ ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಮಹೀಲತೆಯು ಒಂದು ಹೃದ್ವಲಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು (cardioid) ತೋರಿಸಿ.

4. ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ,

$$r^{\frac{2}{9}} \text{ ಕಾಸ್ } \tfrac{2}{9}\theta = a^{\frac{2}{9}}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ 4ನೆಯ ಧನ ಪಾದೀಯವು ಒಂದು ಸಮ ಆತಿಕ್ಷೇಪವೆಂದೂ (rectangular hyperbola), 5ನೆಯ ಧನ ಪಾದೀಯವು ಒಂದು ದ್ವೀಪದ್ವಯವೆಂದೂ (lemniscate) ತೋರಿಸಿ.

5. ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, $r = a\ (1 + \text{ಕಾಸ್}\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯದ 4ನೆಯ ಋಣ ಪಾದೀಯವು ಒಂದು ಪರಿಕ್ಷೇಪವೆಂದು (parabola) ತೋರಿಸಿ.

6.
$$\frac{p}{r} = f(r)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ k ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಪಾದೀಯವು

$$\frac{p}{r} = f\left(\frac{r^{k+1}}{p^k}\right)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $x^2 + y^2 = 4a^2$ ಎಂಬ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆ (cissoid) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $r^2 = a^2 \text{ ಕಾಸ್ } 2\theta$ ಎಂಬ ದ್ವೀಪದ್ವಯಕ್ಕೆ, ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ವರ್ತುಳೀಯ ವಿಲೋಮ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ನಾಭಿಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ,

$$\frac{l}{r} = 1 + e \text{ ಕಾಸ್ } \theta$$

ಎಂಬ ಶಂಕು ಭಾಗಿನಿಯ (conic) ವಿಲೋಮವು ಒಂದು ಮಹೀಲತೆ (limacon) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ನಾಭಿಯ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪರಿಕ್ಷೇಪದ ವಿಲೋಮವಾವುದು ?

10. ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

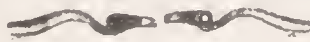
ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯ (ellipse) ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. r^2 ಕಾಸ್ $2\theta=a^2$ ಎಂಬ ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪದ (rectangular hyperbola) ಗೌರವಕ್ಕೆ $r^2=a^2$ ಕಾಸ್ 2θ ಎಂಬ ದ್ವೀಪದ್ವಯದ (lemniscate) ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ,

$$r = ae^{\theta \text{ ಕಾಟ್ } \alpha}$$

ಎಂಬ ಸಮಾನಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಯ ಪ್ರಥಮ ಧನ ಪಾದೀಯ, ವಿಲೋಮ ಮತ್ತು ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾನಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ X

ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳು
(maximum and minimum values)

10·1. ನಿರೂಪಣೆ (definition).

(a, b) ಎಂಬ ಒಂದು x – ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತವಾಗಿದ್ದು, ಆ ಅವಧಿಯ c, $a<c<b$, ಎಂಬ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಬಿಂದುವಿನ (interior point) ಉಭಯ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ

$0<|h|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(c+h)-f(c)<0$

ಆಗುವಂತೆ η ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(c)$ ಎಂಬ ಮೂಲ್ಯವು $f(x)$ ನ ಒಂದು **ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯ**ವೆಂದೂ, ಮತ್ತು $[c, f(c)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು (ಅಥವಾ ಹ್ರಸ್ವವಾಗಿ, $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು) $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ; ಆ ಬದಲು,

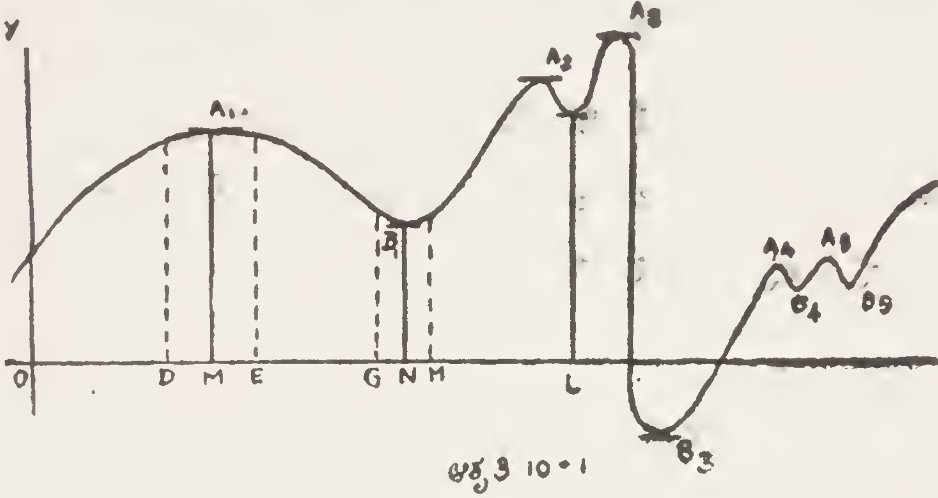
$0<|h|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(c+h)-f(c)>0$

ಆಗುವಂತೆ η ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(c)$ ಎಂಬ ಮೂಲ್ಯವು $f(x)$ ನ ಒಂದು **ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯ**ವೆಂದೂ, ಮತ್ತು $[c, f(c)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

$x=c$ ಎಂಬ ಆಂತರಿಕ ಬಿಂದುವಿನ ಉಭಯ ಸಾಮೀಪ್ಯವೊಂದರಲ್ಲಿ x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $f(x)=f(c)$ ಆದರೆ, ಆಗ ಆ ಬಿಂದುವನ್ನು $f(x)$ ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವೆಂದಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವೆಂದಾಗಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

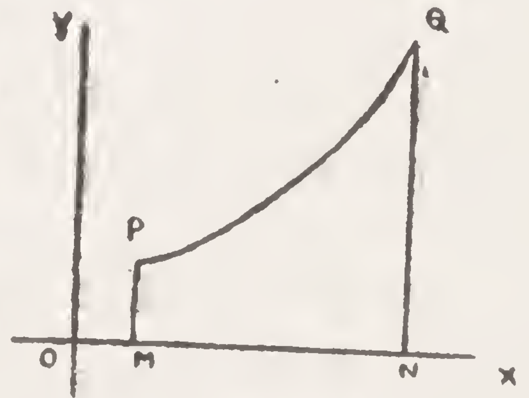
ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳಿಗೆ **ಪರಾಕಾಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳು** (extreme values) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಆಕೃತಿ 10–1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ A_1 ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು ; ಏಕೆಂದರೆ DE ಎಂಬ ಉಭಯ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ MA_1 ಎಂಬ ಆರೂಢವು (ordinate) ಇತರ ಎಲ್ಲ ಆರೂಢಗಳಿಗಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದು. ಮತ್ತೆ B_1 ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು ;



ಆಕೃತಿ 10-1

ಏಕೆಂದರೆ GH ಎಂಬ ಉಭಯ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ NB_1 ಎಂಬ ಆರೂಢವು ಇತರ ಎಲ್ಲ ಆರೂಢಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದು. ಈ ರೇಖೆಗೆ A_2, A_3, . . . ಮುಂತಾದ ಇತರ ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳೂ, B_2, B_3, . . . ಮುಂತಾದ ಇತರ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳೂ ಇವೆ.



ಆಕೃತಿ 10-2

ಆಕೃತಿ 10–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ ಇಲ್ಲ; ರೇಖೆಯು ಸದಾ ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ (§ 1.23).

ಇಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ, ಕನಿಷ್ಠ ಎಂಬ ಪದಗಳಿಗೆ ಅಧಿಕತಮ (greatest) ಅಲ್ಪತಮ (least) ಎಂಬ ಅರ್ಥವಲ್ಲ. ಆಕೃತಿ 10–1 ರಲ್ಲಿ LB_2 ಎಂಬ ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವು MA_1 ಎಂಬ ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಮತ್ತೆ ಆಕೃತಿ 10–2 ರಲ್ಲಿ NQ ಎಂಬ ಆರೂಢವು ಅಧಿಕ ತಮವಾದುದು (greatest) ; ಆದರೆ Q ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಜನ್ಯವಿರಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಆಕೃತಿ 10–1 ರಲ್ಲಿ A_5 ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾದರೂ, ಅಲ್ಲಿ ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಇಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಪ್ರಕೃತದಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಜನ್ಯಗಳನ್ನುಳ್ಳವು.

$x=c$ ಎಂಬ ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x)$ ಗೆ ಜನ್ಯವಿರುವುದಾದರೆ, ಆಗ $f'(c)=0$. ಏಕೆಂದರೆ, ಮೇಲಿನ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $0<h<\eta$ ಆದಾಗ

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0, \text{ ಮತ್ತು } \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}>0;$$

$$\therefore \qquad \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0,$$

$$\text{ಮತ್ತು} \qquad \underset{h\to 0}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geqslant 0.$$

$f'(c)$ ಇದೆಯೆಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಪರಿಮಿತಿಗಳೆರಡೂ $f'(c)$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. $\therefore f'(c)=0$.

ಆದರೆ, ವಿಪರ್ಯಯವಾಗಿ (ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ, conversely), $f'(c)=0$ ಆದಾಗ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗಬೇಕಾದ್ದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $f(x)=x^3$ ಆದರೆ, $f'(0)=0$; ಆದರೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಲಿ, ಕನಿಷ್ಠವಾಗಲಿ ಅಲ್ಲ.

$f'(c)=0$ ಆದರೆ, ಆಗ $[c, f(c)]$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು **ಸ್ತಬ್ಧಬಿಂದು** (stationary point) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

10·2. ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಯಥಾ ಸಮೃದ್ಧ ನಿಬಂಧನೆಗಳು (ಯಥೋಚಿತ, sufficient conditions for maxima and minima).

(1) $(c-\eta,\ c+\eta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಗೆ $f'(x)$ ಎಂಬ ಜನ್ಯವಿದ್ದು,

$c-\eta<x<c$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f'(x)>0$ ಆಗಿಯೂ,

$c<x<c+\eta$,, $f'(x)<0$,,

ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ; ಆ ಬದಲು,

$c-\eta<x<c$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f'(x)<0$ ಆಗಿಯೂ,

$c<x<c+\eta$,, $f'(x)>0$,,

ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ; $c-\eta<x<c$ ಮತ್ತು $c<x<c+\eta$ ಎಂಬ ಎರಡು ಅವಧಿಗಳಲ್ಲೂ $f'(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ: $0<|h|<\eta$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಪ್ರಥಮ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ

$$f(c+h)-f(c)=hf'(\xi)$$

ಆಗುವಂತೆ c ಮತ್ತು $c+h$ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ξ ಇರುತ್ತದೆ. $h<0$ ಆದಾಗ $f'(\xi)>0$ ಆಗಿಯೂ, $h>0$ ಆದಾಗ $f'(\xi)<0$ ಆಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $h<0$ ಆದರೂ ಮತ್ತು $h>0$ ಆದರೂ $hf'(\xi)<0$, ಎಂದರೆ $f(c+h)-f(c)<0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ∴ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಬದಲು, $h<0$ ಆದಾಗ $f'(\xi)<0$ ಆಗಿಯೂ,

$h>0$ ಆದಾಗ $f'(\xi)>0$ ಆಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $h<0$ ಆದರೂ ಮತ್ತು $h>0$ ಆದರೂ $hf'(\xi)>0$, ಎಂದರೆ $f(c+h)-f(c)>0$ ಆಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ, $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ $h<0$ ಆದಾಗಲೂ ಮತ್ತು $h>0$ ಆದಾಗಲೂ $f'(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ h ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾದರೆ, $hf'(\xi)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ $0<|h|\overline{<}\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(c+h)-f(c)$ ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $f'(x)$ ಎಂಬ ಜನ್ಯವು x ನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ y ವರ್ಧಿಸುವ ಧಾರಣವಾದ್ದರಿಂದ (rate), $f'(x)>0$ ಆದಾಗ $f(x)$ ಆರೋಹಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $f'(x)<0$ ಆದಾಗ $f(x)$ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಗಳು c ಎಂಬ ಬೆಲೆಯ ಮುಖಾಂತರ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಸಾಗಿದಂತೆ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆರೋಹಿತ್ವದಿಂದ ಅವರೋಹಿತ್ವಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿದರೆ, ಆಗ $c-\eta<x<c+\eta$ ಎಂಬ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f(c)$ ಎಂಬ ಆರೂಢವು (ordinate) ಅಧಿಕತಮ ಆರೂಢವಾಗುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=c$ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿಯೂ, ಬಲ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ ಆರೋಹಿಯಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ $x=c$ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲ ಸಾಮಿಪ್ಯಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ $f(x)$ ಸದಾ ಆರೋಹಿ ಅಥವಾ ಸದಾ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $c-\eta<x<c+\eta$ ಎಂಬ ಯಾವ ಅವಧಿಯಲ್ಲೂ $f(c)$ ಎಂಬ ಆರೂಢವು ಅಧಿಕತಮ ಅಥವಾ ಅಲ್ಪತಮವಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಆದ್ದರಿಂದ ಆಗ $x=c$ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ (§ 11.1) **ತಿರುಬಿಂದುಗಳು** (turning points) ಎಂದು ಕರೆಯುವುದೂ ಉಂಟು.

2. $a \leqslant x \leqslant b$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $f''(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು, $x=c$ $(a<c<b)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$f'(c)=0 \text{ ಮತ್ತು } f''(c)>0$$

ಆದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು ವಾಗುತ್ತದೆ; ಆ ಬದಲು

$$f'(c)=0, \text{ ಮತ್ತು } f''(c)<0$$

ಆದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು ವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $f'(c)=0$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದಲೂ, ದ್ವಿತೀಯ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದಲೂ,

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^2}{2!}f''(c+\theta h),\ 0<\theta<1, \quad \ldots. \quad \text{(i)}$$

ಈಗ $f''(c)<0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $f''(x)$ ನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ದೆಸೆಯಿಂದ $c-\eta<x<c+\eta$ ಎಂಬ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಸಾವಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $f''(x)<0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $\therefore 0<|h|<\eta$ ಆದರೆ, ಆಗ $f''(c+\theta h)<0$; $\therefore$ (i) ರಿಂದ $f(c+h)-f(c)<0$. $\therefore$ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು. ಉತ್ತರಾರ್ಧವೂ ಹೀಗೆಯೇ.

ಒಂದು ವೇಳೆ $f'(c)=0=f''(c)$ ಆದರೆ, ಆಗ ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಜನ್ಯಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸಬಹುದು.

$a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ, $x=c$ $(a<c<b)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f'(c)=f''(c)= \ldots =f^{2n-1}(c)=0$, ಆದರೆ $f^{2n}(c)\neq 0$ ಆಗಿದ್ದು, $f^{2n}(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$f^{2n}(c)<0$ ಆದರೆ, $x=c$ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ,

$f^{2n}(c)>0$,, ,, ಕನಿಷ್ಠವೂ

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಏಕೆಂದರೆ, ಆಗ ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$f(c+h)-f(c)=\frac{h^{2n}}{(2n)!} f^{2n}(c+\theta h), \quad 0<\theta<1,$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಸಾಧನೆ ಮೇಲಿನಂತೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ, $f'(c)=f''(c)= \ldots =f^{2n-2}(c)=0$, ಆದರೆ $f^{2n-1}(c)\neq 0$ ಆಗಿದ್ದು, $f^{2n-1}(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ h ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾದರೆ $f(c+h)-f(c)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ಮೇಲಿನಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು; ಆದ್ದರಿಂದ ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

ದತ್ತ $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಜನ್ಯಗಳಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಿ (detect) ವಿವೇಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ (discriminate) ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, ಮೊದಲು $f'(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು (solve). ಅದರ ಮೂಲಗಳು (roots) $x=\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅನುಕೂಲ್ಯಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಂತೆ, ಮೇಲಿನ ಯಥಾ ಸಮೃದ್ಧ ನಿಬಂಧನೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಅವು ಗರಿಷ್ಠಗಳೇ, ಕನಿಷ್ಠಗಳೇ ಅಥವಾ ಈ ಎರಡೂ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಕು. ಈಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉದಹರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-2$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$f'(x)=5x^2(x-1)(x-3)$.

$\therefore$ $f'(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $x=0,\ 1,\ 3$.

$f''(x)=10x(2x^3-6x^2+3)$.

$\therefore$ $f''(0)=0$; $f''(1)=-10$; $f''(3)=90$.

$\therefore$ $x=1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವನ್ನೂ, $x=3$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವನ್ನೂ ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವು $f(1)=-1$, ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವು $f(3)=-34$. ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವು $(1,\ -1)$; ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವು $(3,\ -34)$. ಈಗ $x=0$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. $f'(0)=0=f''(0)$; ಆದರೆ $f'''(0)\neq 0$. $\therefore$ $x=0$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು (1), § 10·2 ರಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $f'(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದ 0, 1, 3 ಗಳ ಪೈಕಿ, ಮೊದಲು $x=1$ ಎಂಬ ಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ϵ ಎಂಬುದೊಂದು ಚಿಕ್ಕ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ $f'(1-\epsilon)>0$ ಮತ್ತು $f'(1+\epsilon)<0$. [ಇಲ್ಲಿ ϵ ಎಂಬ ಧನಸಂಖ್ಯೆಯು $1+\epsilon<3$ ಮತ್ತು $1-\epsilon>0$ ಆಗುವಷ್ಟು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರಬೇಕು ; ಎಂದರೆ, $1\pm\epsilon$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $f'(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ($x=1$ ಅಲ್ಲದ) ಇತರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ದಾಟಕೂಡದು.] $\therefore$ x ನ ಬೆಲೆಗಳು $x=1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ದಾಟದಂತೆ, $f'(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು + ನಿಂದ − ಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ $x=1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಿನ $x-$ ನಿರ್ದೇಶಕ. ಹೀಗೆಯೇ, x ನ ಬೆಲೆಗಳು $x=3$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ದಾಟದಾಗ, $f'(x)$ ನ

ಚಿಹ್ನೆಯು − ನಿಂದ + ಗೆ ಬದಲಾಗುವುದರಿಂದ, $x=3$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಿನ x − ನಿರ್ದೇಶಕ. ಮತ್ತೆ $f'(-\epsilon)>0$ ಮತ್ತು $f'(\epsilon)>0$ ಆಗುವುದರಿಂದ, x ನ ಬೆಲೆಗಳು $x=0$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯುನ್ನು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ದಾಟಿದಾಗ $f'(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. $\therefore$ $x=0$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

2. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ, ಮತ್ತು ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದೆ ?

$f'(x)=5x^2(x-1)(x-3)$. $\therefore$ $x<1$ ಅಥವಾ $x>3$ ಆದಾಗ, $f'(x)>0$; ಮತ್ತು $1<x<3$ ಆದಾಗ $f'(x)<0$. $\therefore$ $-\infty<x<1$ ಮತ್ತು $3<x<\infty$ ಎಂಬ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ $f(x)$ ಆರೋಹಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ; $1<x<3$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

3. $x>0$ ಆದಾಗ, $(x-1)e^x+1>0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$f(x)=(x-1)e^x+1$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, $f'(x)=xe^x$. $\therefore$ $x>0$ ಆದಾಗ $f'(x)>0$. $\therefore$ $x>0$ ಆದಾಗ $f(x)$ ಆರೋಹಿ. ಅಲ್ಲದೆ $f(0)=0$. $\therefore$ $x>0$ ಆದಾಗ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು 0 ಇಂದ ಆರೋಹಿಸುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, $x>0$ ಆದಾಗ, $f(x)>0$.

4. R ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳದಲ್ಲಿ (sphere) ಅಂತರ್ಯೋಜಿತವಾದ (inscribed), ಗರಿಷ್ಠ ಘನವುಳ್ಳ (maximum volume), ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವಿನ (right circular cone) ಔನ್ನತ್ಯವು (height). 4R/3 ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

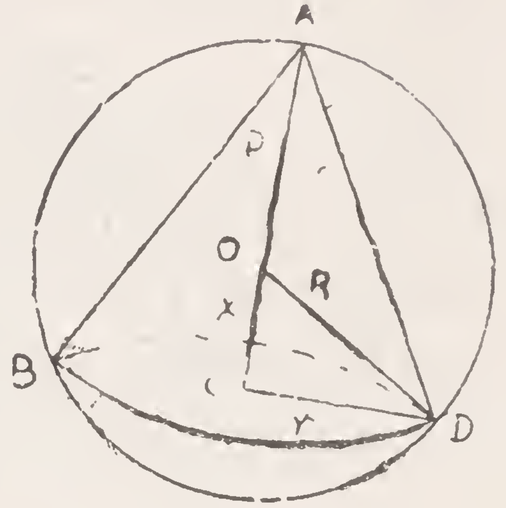
ದತ್ತ ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಯೋಜಿತವಾದ ಒಂದು ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪೀಠದ ತ್ರಿಜ್ಯವು r ಎಂದೂ, ಔನ್ನತ್ಯವು h ಎಂದೂ

ಭಾವಿಸೋಣ. ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರದ ಮುಖಾಂತರ ಶಂಕುವಿನ ಪೀಠಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಸಮತಲೀಯ ಛೇದನವನ್ನು (plane section) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 10–3). ಗೋಳದ ಕೇಂದ್ರವು O, ಮತ್ತು ಶಂಕುವಿನ ಪೀಠದ ಕೇಂದ್ರವು C ಆದರೆ, $OC = x$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $h = AC = R + x$.

ಅಲ್ಲದೆ OCD ತ್ರಿಕೋನದಿಂದ,

$$r^2 = R^2 - x^2.$$

$\therefore$ ಶಂಕುವಿನ ಘನವು v ಆದರೆ, ಆಗ $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ಇಲ್ಲಿ r ಮತ್ತು h ಎಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳಿಗೆ ಪರಸ್ಪರ ಸಂಬಂಧವಿರುವುದರಿಂದ v ಎಂಬ ಘನವನ್ನು x ಎಂಬ ಏಕಮಾತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಆಗ



ಆಕೃತಿ 10 3

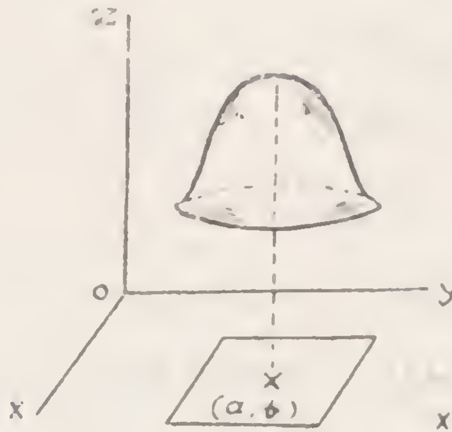
$$v = \tfrac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ v ಗರಿಷ್ಠವೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. $dv/dx = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು $(3x - R)\cdot(x + R) = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ $x = R/3$ ಅಥವಾ $x = -R$. ಆದರೆ, $x = -R$ ಆದಾಗ, $h = 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ ಶಂಕುವು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. $x = R/3$ ಆದಾಗ $d^2v/dx^2 < 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಆಗ v ನ ಬೆಲೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. $x = R/3$ ಆದಾಗ, $h = 4R/3$.

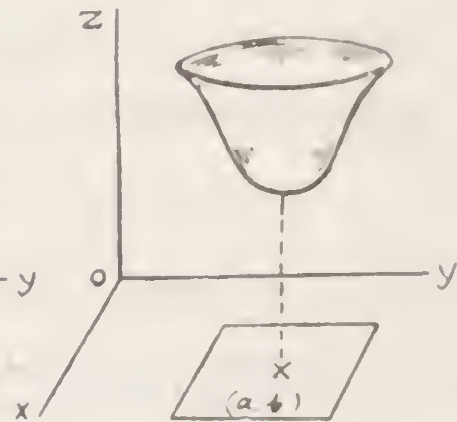
10·3 ಮುಖಸ್ಥಲಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳು (maxima and minima of surfaces.)

ಒಂದು $x - y$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $z = f(x, y)$ ಎಂಬ ಮುಖಸ್ಥಲವೊಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ದತ್ತ ಅವಧಿಯ (a, b) ಎಂಬ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ (interior) ಬಿಂದುವಿನ ಪರಿಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ

$0 < |h| < \eta_1$ ಮತ್ತು $0 < |k| < \eta_2$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(a+h, b+k) - f(a, b) < 0$ ಆಗುವಂತೆ η_1 ಮತ್ತು η_2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(a, b)$ ಎಂಬ ಮೂಲ್ಯವು $f(x, y)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವೆಂದೂ, $[a, b, f(a, b)]$ ಬಿಂದುವು $f(x, y)$ ನ ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ; ಆ ಬದಲು, $0 < |h| < \eta_1$, ಮತ್ತು $0 < k < \eta_2$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0$ ಆಗುವಂತೆ η_1 ಮತ್ತು η_2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(a, b)$ ಎಂಬ ಮೂಲ್ಯವು $f(x, y)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವೆಂದೂ, $[a, b, f(a, b)]$ ಬಿಂದುವು $f(x, y)$ ನ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. $[a, b, f(a,b)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಹ್ರಸ್ವವಾಗಿ (a, b) ಎಂಬ ಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.



ಆಕೃತಿ 10·4



ಆಕೃತಿ 10-5

(a, b) ಎಂಬ ಪರಾಕಾಷ್ಠ (ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ಗೆ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ $f_x(a, b) = 0$ ಮತ್ತು $f_y(a, b) = 0$ ಆಗಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ, ಆಗ $f(x, b)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $x = a$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು $f(a, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $y = b$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ, (conversely), $f_x(a, b) = 0$, ಮತ್ತು $f_y(a, b) = 0$ ಆದಾಗ, (a, b) ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ

ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗಲೇಬೇಕಾದ್ದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $f(x, y) = xy$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$; ಆದರೆ ಮೂಲ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಾಗಲಿ ಅಲ್ಲ.

ಯಥಾ ಸಮೃದ್ಧ ನಿಬಂಧನೆಗಳು (sufficient conditions)

$f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) = 0$, ಮತ್ತು $f_{xx}(a, b) = R$, $f_{xy}(a, b) = S$, $f_{yy}(a, b) = T$ ಎಂದೂ, ಮತ್ತು ಈ ಪಾಕ್ಷಿಕಜನ್ಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದುವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ

(i) $S^2 - RT < 0$ ಮತ್ತು $R < 0$ ಆದರೆ, $f(a, b)$ ಮೂಲ್ಯವು ಗರಿಷ್ಠ ;

(ii) $S^2 - RT < 0$ ಮತ್ತು $R > 0$ ಆದರೆ, $f(a, b)$ ಮೂಲ್ಯವು ಕನಿಷ್ಠ ;

(iii) $S^2 - RT > 0$ ಆದರೆ, $f(a, b)$ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಲಿ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಲಿ ಅಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ: ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ (§5·6),

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h_x(a, fb) + kf_y(a, b)$$
$$+ \frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}(\xi, \eta) + 2hk f_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f_{yy}(\xi, \eta)],$$

ಸಂಗತ $\xi = a\theta h$, $\eta = b + \theta k$, $0 < \theta < 1$.

$$\therefore f(a+h, b+k) - f(a, b)$$
$$= \frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}(\xi, \eta) + 2hk f_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f_{yy}(\xi, \eta)]$$

ಇಲ್ಲಿ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ (continuity) ದೆಸೆಯಿಂದ, ಬಲಗಡೆಯ ವ್ಯಕ್ತಕದ (expression) ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಮತ್ತು

$$E = Rh^2 + 2Shk + Tk^2$$

ಎಂಬ ವ್ಯಕ್ತಕದ ಚಿಹ್ನೆಯೂ, ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಂತೆ (a, b) ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಸಾಮೀಪ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಅಂಥ ಒಂದು ಸಾಮೀಪ್ಯವನ್ನು ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ E ಎಂಬ ವರ್ಗ ವ್ಯಕ್ತಕದ (quadratic expression) ವಿವೇಚಕವು (discriminant) $S^2 - RT$. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಬಂಧನೆ (i) ರಲ್ಲಿ $E<0$; ನಿಬಂಧನೆ (ii) ರಲ್ಲಿ $E>0$; ಆದರೆ ನಿಬಂಧನೆ (iii) ರಲ್ಲಿ E ಗೆ ಸ್ಥಿರಚಿಹ್ನೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : (1) $S^2 - RT < 0$ ಆದಾಗ, $R \neq 0$.

(2) $S^2 - RT = 0$ ಆದಾಗ, ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಕನಿಷ್ಠಗಳ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಯಾವ ತೀರ್ಮಾನವೂ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ ; ವಿಚಾರವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x$$

ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 30x + 72 \; ; \; f_y = 6y(x-5)$$

$f_x = 0$ ಮತ್ತು $f_y = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ (solve),

$$(4, 0), \; (6, 0), \; (5, 1), \text{ ಮತ್ತು } (5, -1)$$

ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈಗ

$$f_{xx} = 6(x-5) \; ; \; f_{xy} = 6y \; ; \; f_{yy} = 6(x-5).$$

$(4, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $R = T = -6$, ಮತ್ತು $S = 0$. $\therefore S^2 - RT < 0$, ಮತ್ತು $R < 0$. $\therefore$ ಈ ಬಿಂದುವು ಗರಿಷ್ಠ ಅಲ್ಲದೆ ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯ $= f(4, 0) = 112$.

ಮತ್ತೆ $(6, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $R = T = 6$, ಮತ್ತು $S = 0$. $\therefore S^2 - RT < 0$, ಮತ್ತು $R > 0$. $\therefore$ ಈ ಬಿಂದುವು ಕನಿಷ್ಠ. ಅಲ್ಲದೆ, ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯ $= f(6, 0) = 108$.

ಮತ್ತೆ $(5, \pm 1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $S^2 - RT > 0$. $\therefore$ ಅವು ಗರಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ, ಕನಿಷ್ಠವೂ ಅಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 10

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$;

ii) $x^3 - 3x^2 - 9x + 10$;

iii) $2x^3 + 21x^2 - 360x - 4888$;

iv) $4x^3 + 9x^2 - 12x - 25$;

v) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

vi) $x/(1+x^2)$;

vii) $(x^2 - 7x + 6)/(x - 10)$;

viii) $[(x+1)(x+4)]/[(x-1)(x-4)]$;

ix) ಸೈನ್$x \cdot$ ಕಾಸ್x;

x) ಕಾಸ್$^2 x \cdot$ ಸೈನ್x;

xi) e^x ಕಾಸ್x;

xii) (ಲಾಗ್x)$/x$.

2. $2x^3-3x^2-12x-4$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ, ಮತ್ತು ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದೆ? ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳಾವುವು?

3. $x>0$ ಆದರೆ,

i) $x>$ ಸೈನ್x ; ii) ಕಾಸ್$x>1-\frac{1}{2}x^2$;

iii) ಸೈನ್$x>x-\frac{x^3}{6}$: iv) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}>$ ಕಾಸ್x.

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ (ಸೈನ್x)$/x$ ಅವರೋಹಿಯೆಂದೂ, (ಟ್ಯಾನ್x)$/x$ ಆರೋಹಿಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

5. x ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $1+x\leq e^x$ ಎಂದೂ, $0\leq x<1$ ಆದಾಗ $e^x\leq 1/(1-x)$ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

6. $x>0$ ಆದರೆ,

$$x-1\geq \text{ಲಾಗ್}\,x\geq (x-1)/x$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಒಂದು ದತ್ತ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಯೋಜಿಸಬಹುದಾದ (inscribe) ಆಯುಗಳ (rectangles) ಪೈಕಿ, ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಆಯುವು ಒಂದು ಚದುರವೆಂದು (square) ತೋರಿಸಿ.

8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ (ellipse) ಅಂತರ್ಯೋಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಆಯುವು, ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ, ಬಹಿರ್ಯೋಜಿತ (escribed) ಆಯುದ ಅರ್ಧದಷ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. ದತ್ತ ಪೀಠಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ (base) ದತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಪೈಕಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆ

ಯುಳ್ಳ (perimeter) ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ದತ್ತ ಸುತ್ತಳತೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಕಿಟಕಿಯನ್ನು, ಒಂದು ಆಯ ಮತ್ತು ಆ ಆಯದ ಮೇಲುಗಡೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿಷ್ಠಿತವಾಗಿರುವ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ, ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಆಯದ ಔನ್ನತ್ಯವನ್ನು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮಗೊಳಿಸಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. ದತ್ತ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ, ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಚದುರಾಕಾರವಾಗಿಯೂ, ಇನ್ನೊಂದನ್ನು ವರ್ತುಳಾಕಾರವಾಗಿಯೂ ಬಗ್ಗಿಸಿದೆ. ಈ ಆಕಾರಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಚದುರದ ಬಾಹುವು ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ (diameter) ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. ಒಂದು ಘನ (cube) ಮತ್ತು ಒಂದು ಗೋಳದ (sphere) ಮುಖಸ್ಥಲಗಳ (surfaces) ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ದತ್ತ ಸ್ಥಿರಿಯಾದಾಗ ಅವುಗಳ ಘನಗಳ (volumes) ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಘನದ ಅಂಚು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ (diameter) ಸಮವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. 28″ × 60″ ಅಳತೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ ತಗಡಿನ ಮೂಲೆಗಳಿಂದ ಸಮವಾದ ಚದುರಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ, ಉಳಿದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಬಹಿರ್ಗಮಿಸಿಕೊಂಡಿರುವ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಲಂಬಕ್ಕೆ ಮಡಿಸಿ, ಮುಚ್ಚಳವಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಘನವು (volume) ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ತಗಡಿನ ಮೂಲೆಗಳಿಂದ ವಿಸರ್ಜಿಸಬೇಕಾದ ಚದುರಗಳ ಬಾಹುವೆಷ್ಟು? ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಅಂಚುಗಳ ಪ್ರಮಾಣಗಳೆಷ್ಟು? ಗರಿಷ್ಠ ಘನವೆಷ್ಟು?

14. ಚದುರಾಕಾರದ ತಳವಿರುವ, ಆದರೆ ಮುಚ್ಚಳವಿಲ್ಲದ, ಒಂದು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು, ದತ್ತ ಘನ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮುಖಸ್ಥಲವಿರುವಂತೆ

ರಚಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಎತ್ತರವನ್ನು ತಳದ ಬಾಹುವಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರಿಸಬೇಕೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. ದತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮುಖಸ್ಥಲ (ಅಂತಿಮ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನೂ ಸೇರಿಸಿಕೊಂಡು) ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಘನವುಳ್ಳ ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಕಾಂಡದ (right circular cylinder) ಔನ್ನತ್ಯವು ಪೀಠ ವರ್ತುಳದ ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

16. R ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಕಾಂಡವನ್ನು ಅಂತರ್ಯೋಜಿಸಿದೆ (inscribed).

(i) ಕಾಂಡದ ಘನವು ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?

(ii) ಅದರ ಪ್ರವಣ ಮುಖಸ್ಥಲವು (curved surface) ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ ಅದರ ಎತ್ತರವೆಷ್ಟು ?

17. R ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಯೋಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವಿನ ಪ್ರವಣ ಮುಖಸ್ಥಲವು ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗಾರ್ಧ ಕೋನವೆಷ್ಟು ((semi-vertical angle)? ಔನ್ನತ್ಯವೆಷ್ಟು? ಆಗ ಶಂಕುವಿನ ಘನವೂ ಗರಿಷ್ಠವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

18. R ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳಕ್ಕೆ ಒಂದು ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವನ್ನು ಬಹಿರ್ಯೋಜಿಸಿದೆ. ಆ ಶಂಕುವಿನ ಘನವು ಕನಿಷ್ಠವಾದಾಗ ಅದರ ಶೃಂಗಾರ್ಧಕೋನವು ಸೈನ್$^{-1}(\frac{1}{3})$ ಎಂದೂ, ಔನ್ನತ್ಯವು 4R ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

19. ಔನ್ನತ್ಯ h ಮತ್ತು ಶೃಂಗಾರ್ಧಕೋನ θ ಉಳ್ಳ ಒಂದು ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಕಾಂಡವನ್ನು ಅಂತರ್ಯೋಜಿಸಿದೆ. ಕಾಂಡದ ಘನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವು

$$\tfrac{4}{27}\pi h^3 \text{ ಟ್ಯಾನ್}^2\theta$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

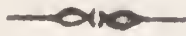
20. $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ಎಂಬ ಮುಖಸ್ಥಲದ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವು (1, 1, 3) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

21. $ax + by + cz = p$ ಆದರೆ, $x^2 + y^2 + z^2$ ನ ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವು $p^2/(a^2 + b^2 + c^2)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠಗಳಿಗೆ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ :

(i) $x^3 - 3x^2 - 4y^2 + 1$;

(ii) $x^2y(x + 2y - 4)$.



ಅಧ್ಯಾಯ XI

ನಿಮ್ನತೆ, ಪೀನತೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳು

(concavity, convexity and points of inflexion)

11.1. x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ. ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿಂದ ಊರ್ಧ್ವ ಅಥವಾ ಅಧೋ ನಿಮ್ನತೆ (concavity upward or downward from the tangent w.r.t. the x–axis).

ಒಂದು ದತ್ತ x – ಅಂತರದಲ್ಲಿ $f(x)$ ಎಂಬುದೊಂದು ಏಕಮೌಲಿ, ಸಜನ್ಯ (differentiable) ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯೆಂದೂ, $x=c$ ಎಂಬುದೊಂದು ಆಂತರಿಕ (interior) ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಉಭಯ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ

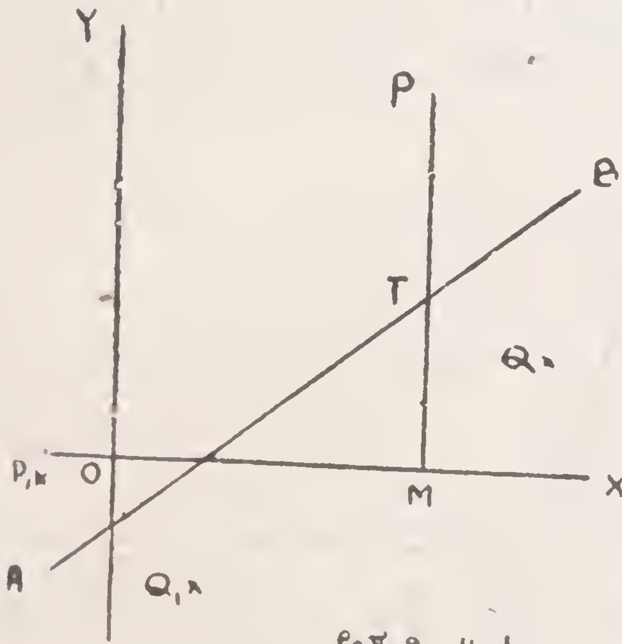
$0<|h|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(c+h)-f(c)-hf'(c)>0$ ಆಗುವಂತೆ η ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿದ್ದರೆ, $f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಿಂದ **ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನ ಅಥವಾ ಅಧಃಪೀನ**ವಾಗಿದೆ (concave upwards or convex downwards) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ; ಆ ಬದಲು,

$0<|h|<\eta$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f(c+h)-f(c)-hf'(c)<0$ ಆಗುವಂತೆ η ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಿಂದ **ಅಧೋನಿಮ್ನ ಅಥವಾ ಊರ್ಧ್ವಪೀನ**ವಾಗಿದೆ.

(concave downwards or convex upwards) ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

x ನ ಬೆಲೆಗಳು $x=c$ ಎಂಬ ಒಂದು ಆಂತರಿಕ ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ ಸಾಗಿದಂತೆ $f(x)$ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನತೆಯಿಂದ ಅಧೋನಿಮ್ನತೆಗಾಗಲಿ ಅಥವಾ ಅಧೋನಿಮ್ನತೆಯಿಂದ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನತೆಗಾಗಲಿ ಬದಲಾದರೆ ಆಗ $[c, f(c)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು **ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು** (point of inflexion) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಈ ನಿರೂಪಣೆಗಳ ರೇಖಾರ್ಥವನ್ನು (geometrical meaning) ಗಮನಿಸೋಣ. ಮೊದಲು, ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಆ ಸಮತಲವನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಭಾಗಗಳ ಪೈಕಿ, ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ಮೇಲ್ಭಾಗವಾವುದು ಕೆಳಭಾಗವಾವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವೇಚಿಸೋಣ (discriminate). ದತ್ತ ಸರಳ ರೇಖೆಯು AB



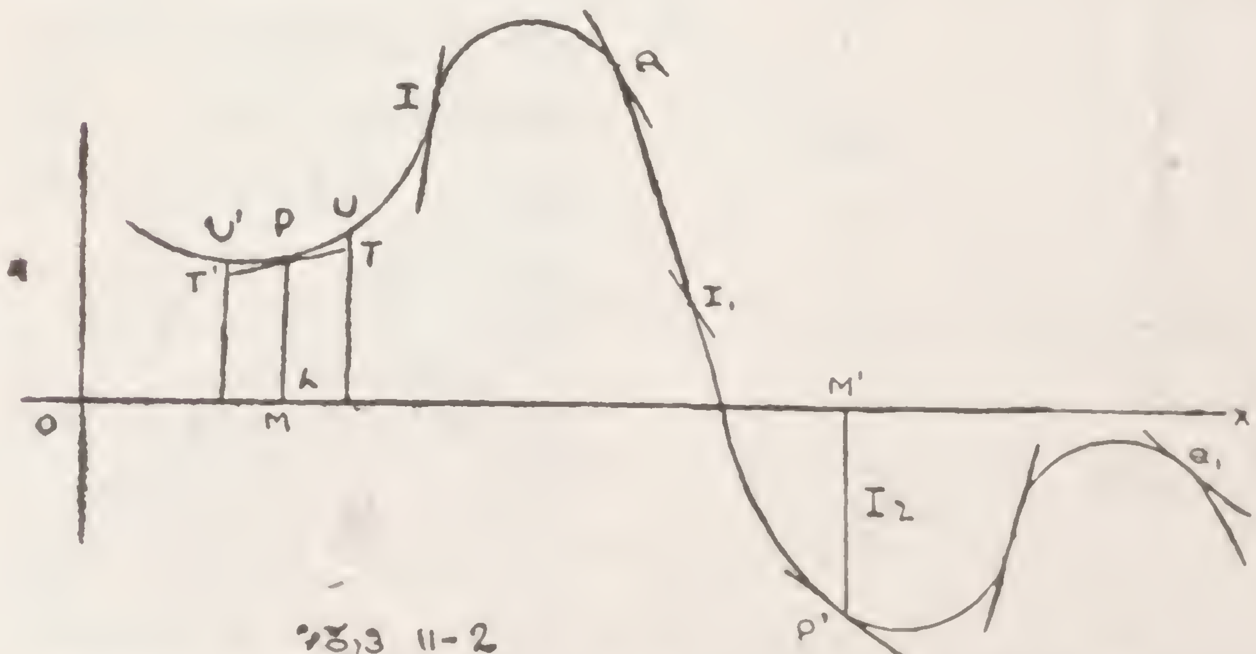
ಆಕೃತಿ 11-1

ಎಂದೂ, ಅದು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಲ್ಲವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 11–1). ಸಮತಲದಲ್ಲಿ AB ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ P ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ PM ಎಂಬ ಲಂಬವು AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು T ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ $MP - MT > 0$ ಆದರೆ,

ಆಗ P ಬಿಂದುವು ಇರುವ ಸಮತಲದ ಭಾಗವು AB ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಮೇಲುಭಾಗವೆಂದೂ, ಆ ಬದಲು $MP-MT<0$ ಆದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು ಇರುವ ಸಮತಲದ ಭಾಗವು AB ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಕೆಳಭಾಗವೆಂದೂ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆಕೃತಿ 11-1 ರಲ್ಲಿ P, P_1 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು AB ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಮೇಲುಭಾಗದಲ್ಲೂ, Q, Q_1 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಇವೆ. (AB ಸರಳ ರೇಖೆಯು x - ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, ಅದರ ಎಡ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸಬಹುದು.) ಈಗ ಆಕೃತಿ 11-2 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $P[c, f(c)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. h ಎಂಬುದೊಂದು ಚಿಕ್ಕ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆಗ

$$f(c+h)-f(c)-hf'(c)=TU.$$

ಇಲ್ಲಿ h ಗೆ ಬದಲು $-h$ ಹಾಕಿದರೆ, TU ಗೆ ಬದಲು $T'U'$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. $0<|h|<\eta$ ಆಗುವಂಥ ಎಲ್ಲ h ಗಳಿಗೂ, ತದನುಗುಣವಾದ TU ಮತ್ತು $T'U'$ ಗಳು ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $(c-\eta,\ c+\eta)$ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ರೇಖೆಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದರೆ ಊರ್ಧ್ವ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಬದಲು, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ



ಆಕೃತಿ 11-2

ಉಭಯ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f(x)$ ರೇಖೆಯು, ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ $f(x)$ ರೇಖೆಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಕೃತಿ 11–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ರೇಖೆಯು P, P_1 ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ, Q, Q_1 ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಇದೆ. ಮತ್ತೆ I ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಒಂದು ಕಡೆಗೆ (ಎಡಗಡೆಗೆ) ರೇಖೆಯು ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ (ಬಲಗಡೆಗೆ) ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದರಿಂದ, I ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು. ಹೀಗೆಯೇ I_1, I_2 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳೂ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳು.

ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ನಿಮ್ನತಾ ಸ್ವಭಾವವು ಬದಲಾಗುವುದರಿಂದ, ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ ದಾಟುತ್ತದೆ (crosses) ಎಂಬ ಅಂಶವು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ.

11·2. ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು (tests).

$a \leq x \leq b$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ದತ್ತವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, $f''(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $x=c$ $(a<c<b)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ,

i) $f''(c)>0$ ಆದರೆ, $f(x)$ ಊರ್ಧ್ವ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ;

ii) $f''(c)<0$ ಆದರೆ, $f(x)$ ಅಧೋ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ;

iii) $f''(c)=0$ ಆಗಿ, x ನ ಬೆಲೆಗಳು c ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದಾಟಿದಂತೆ $f''(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ $f'''(x)$ ಇದ್ದು, $f''(c)=0$, $f'''(c)\neq 0$ ಆದರೆ, ಆಗಲೂ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ,

$$f(c+h)-f(c)-hf'(c)=\frac{h^2}{2!}f''(c+\theta h),\ 0<\theta<1 \ \ldots\ (A)$$

ಈಗ $f''(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $f''(c)\neq 0$ ಆದಾಗ, $f''(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು $f''(c)$ ಯ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುವಂತೆ $(c-\eta,\ c+\eta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಾಮೀಪ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f''(c+\theta h)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು $f''(c)$ ಯ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯಾಗಿದ್ದಂತೆ, (A) ಯ ಎಡ ಭಾಗವು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ∴ ನಿಮ್ನತೆಯ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಮೇಲಿನ (i) ಮತ್ತು (ii) ನೆಯ ನಿರ್ಣಯಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಮತ್ತೆ, x ನ ಬೆಲೆಗಳು c ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದಾಟಿದಂತೆ $f''(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾದರೆ, ಆಗ $f''(c+\theta h)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ತದನುಸಾರವಾಗಿ (A) ಯ ಎಡಭಾಗದ ವ್ಯಕ್ತಕದ (expression) ಚಿಹ್ನೆಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ∴ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೆ, $f''(c)=0$ ಆಗಿ, $f'''(x)$ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ

$$f(c+h)-f(c)-hf'(c)=\frac{h^3}{3!}f'''(c+\theta h),\ 0<\theta<1 \ldots (B)$$

ಈಗ $f'''(x)$ ನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ದೆಸೆಯಿಂದ, $f'''(c)\neq 0$ ಆದಾಗ, $f'''(x)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು $f'''(c)$ ಯ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುವಂತೆ $(c-\eta,\ c+\eta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಸಾಮೀಪ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f'''(c+\theta h)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು $f'''(c)$ಯ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ h^3ನ ಚಿಹ್ನೆಯು hನ ಚಿಹ್ನೆಯೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ∴ ಸಮೀಕರಣ (B) ಇಂದ, $[f(c+h)-f(c)-hf'(c)]$ ಯ ಚಿಹ್ನೆಯು h ನ ಚಿಹ್ನೆಯೊಂದಿಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ∴ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

$f''(c)=f'''(c)=\dots=f^{2n-1}(c)=0$, ಆದರೆ $f^{2n}(c)\neq 0$ ಆಗಿ, $f^{2n}(x)$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಎಂಬ ಆಂತರಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ,

i) $f^{2n}(c)>0$ ಆದರೆ, $f(x)$ ಊರ್ಧ್ವ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ;

ii) $f^{2n}(c)<0$,, ,, ಅಧೋ ,,

iii) $f^{2n}(c)=0$ ಆಗಿ, x ನ ಬೆಲೆಗಳು c ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದಾಟಿದಂತೆ $f^{2n}(x)$ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾದರೆ, ಆಗ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ, ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ $f^{2n+1}(x)$ ಇದ್ದು,
$f''(c)=f'''(c)=\dots=f^{2n}(c)=0$ ಮತ್ತು
$f^{2n+1}(c)\neq 0$ ಆದರೆ, ಆಗಲೂ $x=c$ ಬಿಂದುವು $f(x)$ ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ನಿರ್ಣಯಗಳ ಸಾಧನೆ ಮೇಲಿನಂತೆ.

$f''(c)>0$ ಆದಾಗ $(c-\eta, c+\eta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f''(x)>0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಆ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಆರೋಹಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಊರ್ಧ್ವ ನಿಮ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ತಿರುಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ತಿರುಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $f(x)=x^2(x^2-2x-36)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳಾವುವು? ಈ ರೇಖೆಯು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ (i) ಊರ್ಧ್ವ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ? (iii) ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ?

$f''(x)=12(x+2)(x-3)$. $f''(x)=0$ ಆದಾಗ, $x=-2$, 3. ಈಗ, ϵ ಎಂಬುದೊಂದು ಚಿಕ್ಕ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $f''(-2-\epsilon)>0$, $f''(-2+\epsilon)<0$. $\therefore$ $x=-2$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $f(x)$ನ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು ಅಥವಾ $f'''(-2)\neq 0$; $\therefore$ $x=-2$ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು. ಹೀಗೆಯೇ $x=3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು. ಮತ್ತೆ $-\infty<x<-2$ ಆದಾಗಲೂ, $x>3$ ಆದಾಗಲೂ $f''(x)>0$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಈ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ $f(x)$ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. $-2<x<3$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ $f''(x)<0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $f(x)$ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

2. $x^2+y^2=a^2$ ಎಂಬ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಇರುವ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವು ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಕೆಳಗಡೆ ಇರುವ ಅರ್ಧ ವರ್ತುಳವು ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಇವೆ. ಆದರೆ $(a, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು ದಾಟುವುದಿಲ್ಲ (does not cross). ಅಥವಾ ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ y ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. y ನ ಬೆಲೆಗಳು $(a, 0)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ ಸಾಗಿದಂತೆ, ರೇಖೆಯ ನಿಮ್ನತಾ ಸ್ವಭಾವವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಒಂದು ಕಡೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ $(-a, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೂ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಲ್ಲ.

11.3. ಆರೂಢದ ಪಾದವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ರೇಖೆಯ ನಿಮ್ನತೆ ಮತ್ತು ಹೀನತೆ (concavity and convexity w.r.t. the foot of the ordinate).

ಆಕೃತಿ 11–2 ರಲ್ಲಿ P ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ $f(x)$ ರೇಖೆಯು ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದರೆ, P ಬಿಂದುವನ್ನು

ಅದರ ಆರೂಢದ (ಭುಜದ) ಪಾದವಾದ M ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಡೆಗೆ ಪೀನವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ; ಮತ್ತೆ P_1 ಬಿಂದುವನ್ನು M_1 ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನ ಕಡೆಗೆ ನಿಮ್ನವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ, P ನ ಆರೂಢವು ಧನವಾಗಿಯೂ, P_1 ನ ಆರೂಢವು ಋಣವಾಗಿಯೂ ಇರುವುದರಿಂದ, M ಎಂಬ ವೀಕ್ಷಕನ ದೃಷ್ಟಿಯು ಮೇಲುಗಡೆಗೂ M_1 ಎಂಬ ವೀಕ್ಷಕನ ದೃಷ್ಟಿಯು ಕೆಳಗಡೆಗೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆಯೇ Q ಮತ್ತು Q_1 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಆರೂಢಗಳ ಪಾದಗಳಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ, ರೇಖೆಯು ವೀಕ್ಷಕನಿಗೆ Q ಎಂಬಲ್ಲಿ ನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ, Q_1 ಎಂಬಲ್ಲಿ ಪೀನವಾಗಿಯೂ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ, ಆರೂಢದ ಪಾದದಿಂದ ಕಾಣಿಸುವ ನಿಮ್ನತೆ ಅಥವಾ ಪೀನತೆಯು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿದ ನಿಮ್ನತೆ ಅಥವಾ ಪೀನತೆಯನ್ನೇ (§ 11.1) ಅಲ್ಲದೆ, ಆರೂಢದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$f(c)[f(c+h)-f(c)-hf'(c)]\gtreqless 0$$

ಆದಂತೆ, ರೇಖೆಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಾದದಿಂದ ಪೀನ ಅಥವಾ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ § 11.2 ರ ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದಾದರೆ,

$$f(c)\cdot f''(c)\gtreqless 0$$

ಆದಂತೆ, ರೇಖೆಯು $x=c$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಆರೂಢದ ಪಾದವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಪೀನ ಅಥವಾ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, y ಎಂಬ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿಯನ್ನಾಗಿಯೂ, x ವಿಸ್ವಭಾವಿಯನ್ನು y ನ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ಪರಿಗಣಿಸುವುದು ಉಚಿತ.

ಉದಾಹರಣೆ

$y=(x+1)(x-2)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $x=1$ ಮತ್ತು $x=3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಆರೂಢದ ಪಾದದಿಂದ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯೆ ಅಥವಾ ಪೀನವಾಗಿದೆಯೆ ? ಈ ರೇಖೆಯು, ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ

$$f(1)=-2\,;\; f(3)=4\,;\; f''(x)=2$$

$\therefore\ f(1)\cdot f''(1)<0.\quad \therefore\ x=1$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಆರೂಢದ ಪಾದಕ್ಕೆ ರೇಖೆಯು ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ. ಮತ್ತೆ $f(3)\cdot f''(3)>0$. $\therefore\ x=3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಆರೂಢದ ಪಾದಕ್ಕೆ ರೇಖೆಯು ಪೀನವಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ $f''(x)>0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲೆಡೆಯೂ ಊರ್ಧ್ವ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ.

11·4. ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ರೇಖೆಯ ನಿಮ್ನತೆ ಮತ್ತು ಪೀನತೆ (concavity and convexity w.r.t. the pole).

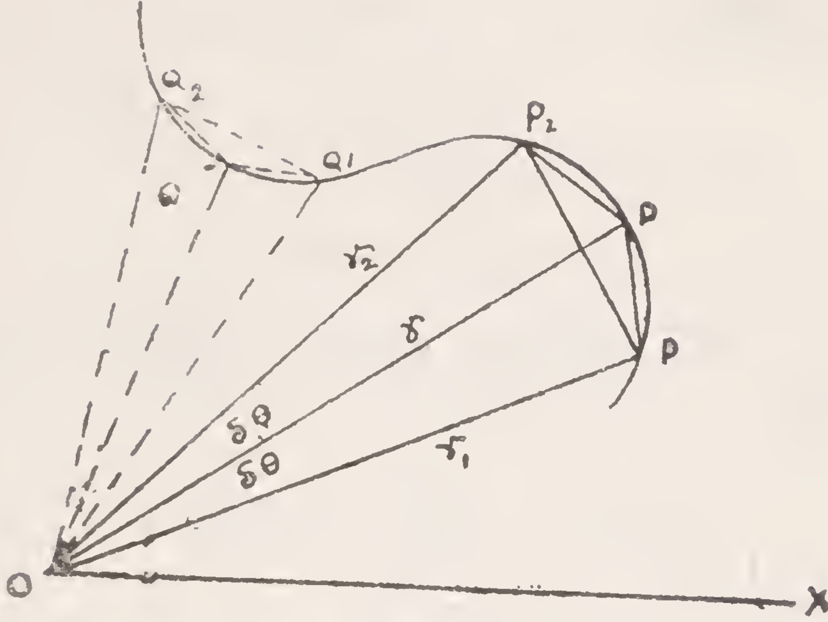
$r=f(\theta)$ ಎಂಬ ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯು, ಅದರ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಧ್ರುವದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನಿಮ್ನವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅಥವಾ ಪೀನವಾಗಿ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಈಗ ಒಂದು ನಿರ್ಧಾರಕವನ್ನು (test, criterion) ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ದತ್ತ ಬಿಂದುವು P ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 11-3). OP ರೇಖೆಯ ಉಭಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕೆ $\delta\theta$ ಕೋನದಲ್ಲಿ OP_1, OP_2 ರೇಖೆಗಳು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಈಗ,

$$\triangle OP_1P+\triangle OPP_2 \gtreqless \triangle OP_1P_2$$

($\triangle$ = ಸಲೆ) ಆದಂತೆ, ದತ್ತರೇಖೆಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಧ್ರುವದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನಿಮ್ನ ಅಥವಾ ಪೀನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆಕೃತಿ 11–3 ರಲ್ಲಿ

ರೇಖೆಯು, O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪೀನವಾಗಿಯೂ ಇದೆ. ಮೇಲಿನ ಅಸಮತೆಯನ್ನು



ಆಕೃತಿ 11-3

$$\tfrac{1}{2} r r_1 \text{ ಸೈನ್ } \delta\theta + \tfrac{1}{2} r r_2 \text{ ಸೈನ್ } \delta\theta \gtreqless \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \text{ ಸೈನ್ } 2\delta\theta,$$

ಅಥವಾ, $$r r_1 + r r_2 \gtreqless r_1 r_2 \text{ ಕಾಸ್ } \delta\theta,$$

ಅಥವಾ, $$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \gtreqless \frac{2}{r} \text{ ಕಾಸ್ } \delta\theta.$$

ಅಥವಾ, $$u_2 + u_1 \gtreqless 2u \text{ ಕಾಸ್ } \delta\theta$$

$(u = 1/r)$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಷ್ಟೆ. ಈಗ ದ್ವಿತೀಯ ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ,

$$u_2 = u + \delta\theta \frac{du}{d\theta} + \frac{(\delta\theta)^2}{2!} \frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta + \epsilon_1 \delta\theta), \ 0 < \theta_1 < 1,$$

$$u_1 = u - \delta\theta \frac{du}{d\theta} + \frac{(\delta\theta)^2}{2!} \frac{d^2}{d\theta^2} u(\theta - \epsilon_2 \delta\theta), \ 0 < \theta_2 < 1.$$

$$\therefore\ u_2 + u_1 = 2u + \frac{(\delta\theta)^2}{2!} \frac{d^2}{d\theta^2}[u(\theta + \epsilon_1 \delta\theta) + u(\theta - \epsilon_2 \delta\theta)].$$

ಇಲ್ಲಿ $\delta\theta > 0$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\delta\theta)^4}{4!} > \text{ಕಾಸ್}\,\delta\theta > 1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2!}$$

(ಉದಾ. 3, ಅಭ್ಯಾಸ 10). ಆದ್ದರಿಂದ,

$$u_2 + u_1 > 2u\left[1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\delta\theta)^4}{4!}\right]$$

ಆದಾಗ,

$$u_2 + u_1 > 2u\ \text{ಕಾಸ್}\,\delta\theta$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ∴ ಆಗ ರೇಖೆಯು ಧ್ರುವದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ

$$u_2 + u_1 < 2u\left[1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2!}\right]$$

ಆದಾಗ,

$$u_2 + u_1 < 2u\ \text{ಕಾಸ್}\,\delta\theta$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ∴ ಆಗ ರೇಖೆಯು ಧ್ರುವದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಪೀನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ರೇಖೆಯು ನಿಮ್ನವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ,

$$2u + \frac{(\delta\theta)^2}{2!}\ \frac{d^2}{d\theta^2}[u(\theta + \epsilon_1\delta\theta) + u(\theta - \epsilon_2\delta\theta)]$$

$$> 2u\left[1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\delta\theta)^4}{4!}\right]$$

ಎಂದರೆ,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\theta^2}[u(\theta + \epsilon_1\delta\theta) + u(\theta - \epsilon_2\delta\theta)] > -u + \frac{u}{12}(\delta\theta)^2$$

ಆಗಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ $d^2u/d\theta^2$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, $\delta\theta \to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{d\,u}{d\theta^2} > -u,\ \text{ಎಂದರೆ,}\ u + \frac{d^2u}{d\theta^2} > 0.$$

$\therefore\ u+(d^2u/d\theta^2)>0$ ಆದಾಗ, ರೇಖೆಯು ಧ್ರುವಕ್ಕೆ ನಿಮ್ನ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೆ, ಧ್ರುವವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ, ರೇಖೆಯು ಪೀನವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ,

$$2u+\frac{(\delta\theta)^2}{2!}\frac{d^2}{d\theta^2}[u(\theta+\epsilon_1\delta\theta)+u(\theta-\epsilon_2\delta\theta)]$$

$$<2u\left[1-\frac{(\delta\theta)^2}{2!}\right]$$

ಆಗಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ $d^2u/d\theta^2$ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, $\delta\theta\to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $u+(d^2u/d\theta^2)<0$ ಆದಾಗ, ರೇಖೆಯು ಧ್ರುವಕ್ಕೆ ಪೀನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ, ಮೇಲಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ,

$$u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\gtreqless 0$$

ಆದಂತೆ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಧ್ರುವದ ಗೌರವಕ್ಕೆ, ನಿಮ್ನ ಅಥವಾ ಪೀನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $u+(d^2u/d\theta^2)=0$ ಆಗಿ, θ ಕೋನದ ಬೆಲೆಗಳು ದತ್ತ ಬೆಲೆಯ ಮುಖಾಂತರ ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ಕಡೆಗೆ ಸಾಗಿದಾಗ $u+(d^2u/d\theta^2)$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾದರೆ, ಆಗ ಆ ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲವನ್ನು ಉದಾ. 3, ಅಭ್ಯಾಸ 8 ರಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ

$r=e^{k\theta}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು, ಧ್ರುವದ ಗೌರವಕ್ಕೆ, ಎಲ್ಲೆಡೆಯೂ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\because\ u+\frac{d^2u}{d\theta^2}=(1+k^2)u>0.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 11

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು (points of inflexion) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $x^4 - 16x^3 + 42x^2 + 20x - 15$;

ii) $x^3(x^2 - 5x + 5) - 3x + 2$;

iii) $x/(1 + x^2)$;

iv) $x = y^3 + 3y^2$;

v) ಸೈನ್^{4}x ;

vi) xe^x ;

vii) x^2 ಲಾಗ್$_e(1 - x)$.

2. $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 9x + 5$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

3. $y^2(x - a) = x^2(x + a)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನೂ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿ ಉಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜವು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $y = x^2/(\lambda^2 + x^2)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳು $4y - 1 = 0$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. e^x ರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲೆಡೆಯೂ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

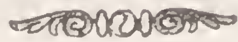
6. ಲಾಗ್$_e x$ ರೇಖೆಯು ಎಲ್ಲೆಡೆಯೂ ಅಧೋನಿಮ್ನವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಆರೂಢದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅದು $0 < x < 1$ ಆದಾಗ ಪೀನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, $x > 1$ ಆದಾಗ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

7. $y = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $x < 0$ ಆದಾಗ ಅಧೋನಿಮ್ನ ವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, $x > 0$ ಆದಾಗ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ. ಆದರೆ ಆರೂಢದ ಪಾದಕ್ಕೆ ಅದು $x < 0$ ಆದಾಗಲೂ $x > 0$ ಆದಾಗಲೂ ಪೀನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y = x^3 - 5x^2 + ax + b$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ (i) ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ? (ii) ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ?

9. $u =$ ಕಾಷ್ θ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ಧ್ರುವಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲಿಡೆಯೂ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $u = \sqrt{\theta}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಪ್ರತಿವಲನ (inflexion) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಅಧ್ಯಾಯ XII

ಪ್ರವಣತೆ

(curvature)

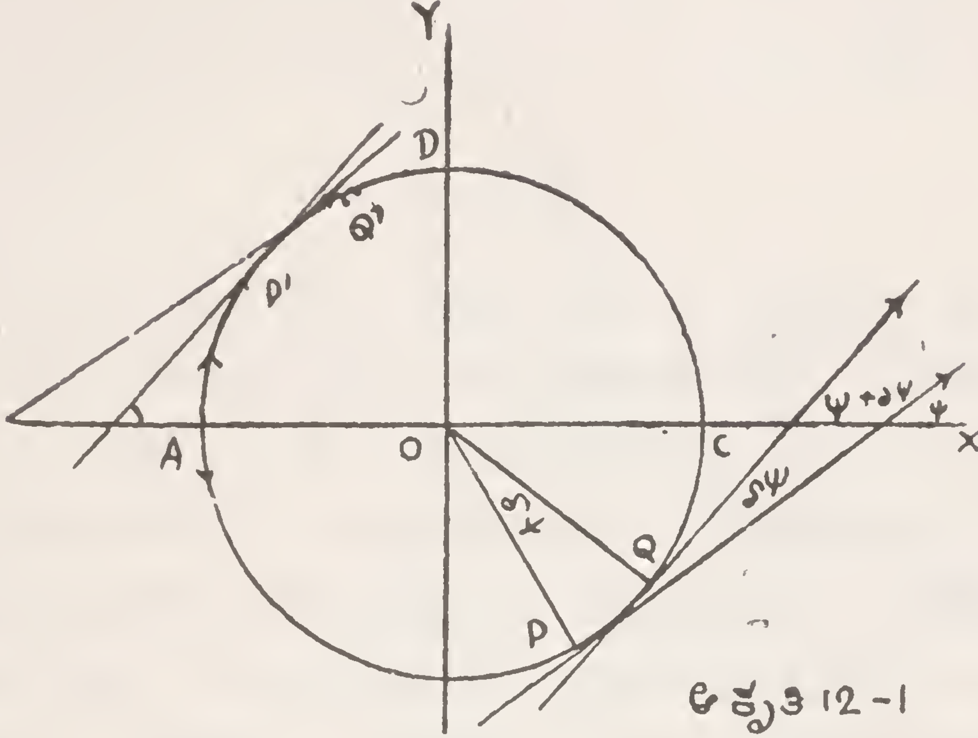
12.1. ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿಂದ ಯಾವ ಕಡೆಗೆ, ಎಷ್ಟುಮಟ್ಟಿಗೆ ಬಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನೀಗ ಗಮನಿಸೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು ಏಕಮೂಲ್ಯವಾದುವು (single-valued), ಅಥವಾ ಏಕಮೂಲ್ಯ ರೇಖೆಗಳಾಗಿ ಒಡೆಯಬಹುದಾದುವು. ರೇಖೆಗಳ ಅನುಸರಣವು ಯಾವಾಗಲೂ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ, ಎಂದರೆ x ನ ಬೆಲೆಗಳು ವರ್ಧಿಸುವಂತೆ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಿಯಮಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶೆಯು (direction) x ನ ಬೆಲೆಗಳು ವರ್ಧಿಸುವಂತಿರುತ್ತದೆ. ಈ ದಿಶೆಯು x – ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಶೆಯೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ψ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಲಾಗುವುದು. ರೇಖೆಯು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ ψ ಕೋನವು 1 ಅಥವಾ 4 ನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ (quadrant) ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ. ರೇಖೆಯ ಕಂಸವು (s), ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ, x ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅನ್ಯಥಾ ದತ್ತ ಅಥವಾ ಧ್ವನಿತವಾಗದಿದ್ದಾಗ, dy/dx ಮತ್ತು dy^2/dx^2 ಎಂಬ ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನಗಳು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದುವೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೊದಲು ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸೋಣ.

12.2. ವರ್ತುಳದ ಪ್ರವಣತೆ (curvature of a circle).

ದತ್ತ ವರ್ತುಳವು $x^2+y^2=a^2$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 12–1). ಈ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಕೆಳಗಡೆ ABC ಎಂಬ ಅನಾವೃತ ಕಂಸವು (open arc, A ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು) x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗೆ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ



ಆಕೃತಿ 12-1

(concave upwards), x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಮೇಲುಗಡೆ ಇರುವ ADC ಎಂಬ ಅನಾವೃತ ಕಂಸವು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ; ಅಲ್ಲದೆ (a, o) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳವು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಎಡಗಡೆಗೆ ನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ, $(-a, o)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಬಲಗಡೆಗೆ ನಿಮ್ನವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಮೊದಲು, ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿರುವ ABC ಎಂಬ ಅನಾವೃತ ಕಂಸವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಕಂಸವು x ನ ಬೆಲೆಗಳು ವರ್ಧಿಸುವಂತೆ, ಎಂದರೆ ABC ಎಂಬ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ P ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದು, ಮತ್ತು Q ಎಂಬುದೊಂದು ಪ್ರಚಲಿತ (current) ಬಿಂದು ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು x – ಅಕ್ಷದ

ಧನ ದಿಶಿಯೊಂದಿಗೆ ಮಾಡುವ ಕೋನಗಳನ್ನು ψ ಮತ್ತು $\psi + \delta\psi$ ಎಂದೂ, PQ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು δs ಎಂದೂ ಸಂಕೇತಿಸೋಣ. ಈಗ s ಎಂಬ ಕಂಸದ ವೃದ್ಧಿಯು δs ಆದರೆ, ತದನುಗುಣವಾಗಿ ψ ಎಂಬ ಕೋನದ ವೃದ್ಧಿಯು $\delta\psi$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಅಲ್ಲದೆ, δs ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿದ್ದಂತೆ $\delta\psi$ ಯೂ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\delta s = a\delta\psi$ ($\because \angle POQ = \delta\psi$). $\therefore$ $\delta s \to o$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{a}.$$

ಹೀಗೆ, ಈ ಕಂಸದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಕಂಸವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಧಾರಣೆಯು (rate) $1/a$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಧಾರಣೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಕಂಸದ ಪ್ರವಣತೆಯೆಂದು ಅಂಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಧಾರಣೆಯನ್ನು ಪ್ರವಣತೆಯೆಂದು ಕರೆಯುವುದು ನ್ಯಾಯವಾಗಿಯೇ ಇದೆ. ಹೀಗೆ ಈ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಕಂಸವು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ಮೇಲುಗಡೆಗೆ ಬಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಪ್ರವಣತೆಯು (ಬಾಗು) $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{a}$. ಈಗ, s ಎಂಬ ಕಂಸದ ಅಳತೆಯು $A\left(\psi = -\frac{\pi}{2}\right)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಿಯಮಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ABC ಕಂಸದ ಅಂತರ್ಗುಣ (intrinsic) ಸಮೀಕರಣವು $s = a\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)$ ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅಂತರಣದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ, $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{a}$ ಎಂಬ ಫಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿರುವ ADC ಎಂಬ ಅನಾವೃತ ಕಂಸವನ್ನು (A ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ವಿನಾ) ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಕಂಸವೂ ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ, ಎಂದರೆ ADC ಎಂಬ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ

ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ s ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ ψ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, s ಕಂಸದ ಅಳತೆಯು $A\left(\psi=\frac{\pi}{2}\right)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂದು ನಿಯಮಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ADC ಕಂಸದ ಅಂತರ್ಗುಣ ಸಮೀಕರಣವು $s=a\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{d\psi}{ds}=-\frac{1}{a}.$$

ಹೀಗೆ, ಈ ಕಂಸದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಪ್ರವಣತೆಯು $(-1/a)$ ಆಗುತ್ತದೆ; ಇಲ್ಲಿ ಋಣಚಿಹ್ನೆಯು ಅಧೋನಿಮ್ನತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೆ C (a, o) ಮತ್ತು A$(-a, o)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. P ಬಿಂದುವು C ಬಿಂದುವನ್ನು, ABC ಎಂಬ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ, ಪ್ರವಣತೆಯು $1/a$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಗೂ, ADC ಎಂಬ ಮಾರ್ಗವಾಗಿ ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ $-1/a$ ಎಂಬ ಸ್ಥಿರಿಗೂ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನನುಸರಿಸಿ $+1/a$ ಅಥವಾ $-1/a$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಹೀಗೆಯೇ. ಆದರೆ, ವರ್ತುಳದ ಸಮಸಾಂಗತ್ಯದ (symmetry) ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ, A ಬಿಂದುವನ್ನು ADC ಕಂಸಕ್ಕೂ, C ಬಿಂದುವನ್ನು ABC ಎಂಬ ಕಂಸಕ್ಕೂ ಸೇರಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಆಗ ಆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯ ದಿಶಿಯು $y-$ಅಕ್ಷದ ಧನ ದಿಶಿಯಾಗುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲೂ $\psi=\pi/2$. ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $+1/a$, ಮತ್ತು D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $-1/a$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲಿಗೆ, A, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯೂ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ದಿಶಿಯೂ ವರ್ತುಳದ ಇತರ ಅಭಿಮುಖ (opposite) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುತ್ತವೆ; ಮತ್ತು ψ ಗೆ

$\pi/2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಕೈಬಿಟ್ಟುಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. ಸಮಸಾಂಗತ್ಯದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ, ಇತರ ಅಭಿಮುಖ ಬಿಂದುಗಳನ್ನನುಸರಿಸಿ, A, C ಬಿಂದುಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ψ ನ ಬೆಲೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಈ ಬೆಲೆಯು $+\pi/2$ ಅಥವಾ $-\pi/2$ ಆಗಬೇಕಷ್ಟೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $-\pi/2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ರೇಖಾನುಸರಣದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಒದಗುವ $\pi/2$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಬಿಟ್ಟುಹೋಗಿ, ψ ನ ಬೆಲೆಗಳ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿಯುಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ A, C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $\psi=\pi/2$ ಎಂದು ನಿಯಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಇಡೀ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $s=a\psi$ ಎಂದು ಬರೆದಾಗ, ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿರುವ ಭಾಗವು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೂ, ಅಧೋ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುವ ಭಾಗವು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೂ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವರ್ತುಳವು ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಿಂದ ಯಾವ ಕಡೆಗೆ ಬಾಗಿದೆ ಎಂಬ ಅಂಶವು ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಮೇಲಿನ ಫಲಗಳನ್ನು $d\psi/ds$ ನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಮತ್ತು ಪರಮಾನ ರೂಪಗಳಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

[ಟಿಪ್ಪಣಿ (2) ಉದಾ. 3, § 12.4 ನೋಡಿ.]

12.3. ನಿರೂಪಣೆ (definition).

ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯು, ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗಿನ $d\psi/ds$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿತವಾಗಿದೆ.

ರೇಖೆಯು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ s ಗೆ ಬದಲು $s'=l-s$, ಮತ್ತು ψ ಗೆ ಬದಲು $\psi'=\psi+\pi$ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುವುದರಿಂದ $d\psi'/ds'=-d\psi/ds$ ಆಗುತ್ತದೆ. ರೇಖಾನುಸರಣವು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಎಂದು ನಿಯಮಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

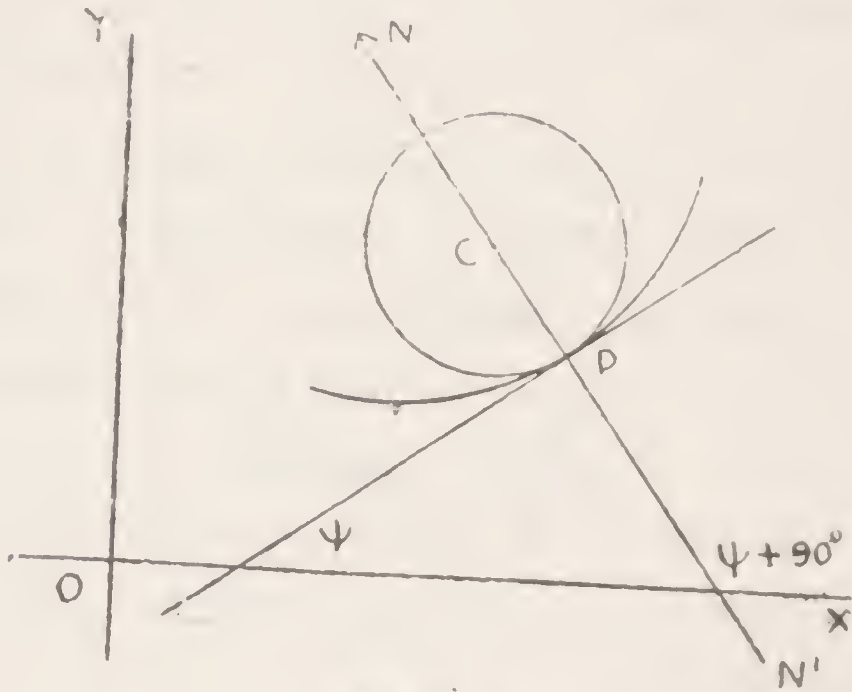
ಈಗ

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$
$$= \frac{d\psi}{dx} \cdot \text{ಕಾಸ್}\,\psi.$$

ರೇಖೆಯು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ, ψ ಕೋನವು 1 ಅಥವಾ 4 ನೆಯ ಚೌಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ (quadrants) ಮಾತ್ರ ಇರುವುದರಿಂದ, ಕಾಸ್ ψ ಧನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ($\psi \neq \pm\pi/2$). ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯು $d\psi/dx$ ನ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನವಾಗಿದ್ದಾಗ, x ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ ψ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ (ಅಥವಾ x ಕ್ಷೀಣಿಸಿದಂತೆ ψ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆ). ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಿಂದ ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ ಪ್ರವಣತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯು ಋಣವಾಗಿದ್ದರೆ, x ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ ψ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆಯಾದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಿಂದ ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು P ಎಂಬ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿ ಎಳೆಯಬಹುದಷ್ಟೆ. ಈ ವರ್ತುಳಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಈ ವರ್ತುಳಗಳ ಪೈಕಿ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯಷ್ಟೇ ಪ್ರವಣತೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ **ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳ** (circle of curvature) ಎಂದು ಹೆಸರು. ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳಕ್ಕೂ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೂ $d\psi/ds$ ಒಂದೇ ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವು ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ನಿಮ್ನವಾಗಿರುವ ಕಡೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 12–2). ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ **ಪ್ರವಣತಾಕೇಂದ್ರ** (centre of curvature) ಎಂದೂ, ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ **ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯ**

(radius of curvature) ಎಂದೂ ಹೆಸರು. § 12.2 ರಿಂದ, ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು $|ds/d\psi|$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು $|\rho|$ ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸುವುದು ವಾಡಿಕೆ ; ρ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವು **ಪ್ರವಣತಾ ವ್ಯತಿಹಾರ** ವಾದ (reciprocal of curvature) $ds/d\psi$ ಯನ್ನು ಸಂಕೇತಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರವಣತೆಯು $1/\rho$ ಆಗುತ್ತದೆ. P ಬಿಂದುವಿನ



ಆಕೃತಿ 12-2

ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವಾದ C ಬಿಂದುವು, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಆ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು ಧನ ದಿಶಿಯನ್ನು $(\psi + 90^\circ)$ ಗೌರವಿಸಿ ρ ನಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $\rho > 0$ ಆದರೆ, ಆಗ ರೇಖೆಯು ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ C ಬಿಂದುವು PN ಎಂಬ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ; $\rho < 0$ ಆದರೆ, ಆಗ ರೇಖೆಯು ಅಧೋ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ C ಬಿಂದುವು PN′ ಎಂಬ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ವೇಳೆ ρ ವನ್ನು ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದು ಕರೆಯುವುದೂ ಉಂಟು ; ಆಗ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯು ರೇಖೆಯ ಊರ್ಧ್ವ ಅಥವಾ ಅಧೋ ನಿಮ್ನತೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದೆಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಛೇದಕಗಳಿಗೆ ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

12.4. ಪ್ರವಣತೆಗೆ ಇತರ ವ್ಯಕ್ತಕಗಳು (other expressions for curvature).

(1) ಅಂತರ್ಗುಣ ರೂಪ (intrinsic form):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\psi}{ds}.$$

ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ (§ 12.3).

(2) ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ರೂಪ (cartesian form): ರೇಖೆಯು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{y''}{|(1+y'^2)^{3/2}|}$$

ಇಲ್ಲಿ ಆಶುರೇಖೆಗಳು (dashes) x ನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಅಂತರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ ; $\quad$ ಟ್ಯಾನ್ $\psi=\frac{dy}{dx}$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು s ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ

$$\text{ಸೆಕ್}^2\psi\,\frac{d\psi}{ds}=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds}.$$

ಆದರೆ, $\quad dx/ds=$ ಕಾಸ್ ψ, ಮತ್ತು $d\psi/ds=1/\rho$.

$$\therefore\quad \frac{1}{\rho}=\frac{d^2y/dx^2}{\text{ಸೆಕ್}^3\psi}$$

$$=\frac{d^2y/dx^2}{|[1+(dy/dx)^2]^{3/2}|}$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ರೇಖೆಯು ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂಬ ನಿಯಮಾನುಸಾರವಾಗಿ ψ ಕೋನವು 1 ಅಥವಾ 4 ನೆಯ ಚೌಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ (quadrants) ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸೆಕ್ $\psi > 0$, ($\psi \neq \pm\pi/2$). $\therefore$ $(1+y'^2)^{3/2}$ ವನ್ನು ಧನವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಆಗ ಪ್ರವಣತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯು y'' ನ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $\therefore$ ಪ್ರವಣತೆಯು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿದ್ದಂತೆ, ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಊರ್ಧ್ವ ಅಥವಾ ಅಧೋ ನಿಮ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿವಲನ (inflexion) ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $y''=0$ ಆಗುವುದರಿಂದ ಪ್ರವಣತೆಯು ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

(3) ಪರಮಾನರೂಪ (parametric form):

ದತ್ತರೇಖೆಯು $x=f(t)$, $y=\phi(t)$ ಆಗಿ, ಎಡದಿಂದ ಬಲಕ್ಕೆ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ, t ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dot{f}\ddot{\phi} - \dot{\phi}\ddot{f}}{|(\dot{f}^2+\dot{\phi}^2)^{3/2}|} \cdot \left[\frac{|\dot{f}|}{\dot{f}}\right].$$

ಇಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳು t ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{f}}$$

$$\therefore \quad |(1+y'^2)^{3/2}| = \left|\left(\frac{\dot{f}^2+\dot{\phi}^2}{\dot{f}^2}\right)^{3/2}\right|.$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\phi}}{\dot{f}}\right]\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\dot{f}\ddot{\phi} - \dot{\phi}\ddot{f}}{\dot{f}^2} \cdot \frac{1}{\dot{f}} = \frac{\dot{f}\ddot{\phi} - \dot{\phi}\ddot{f}}{\dot{f}^3}$$

ಈಗ $1/\rho$ ನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ರೂಪದಿಂದ ಫಲವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಕೆಲವು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಪರಮಾನ ರೂಪವು ಮೇಲಿನ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ರೂಪಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯೋಗಕರವಾದುದು. ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಪರಮಾನ ರೂಪವು ನೇರವಾಗಿ ಫಲಿಸುತ್ತದೆ.

(4) ಪಾದೀಯ $(p-r)$ ರೂಪ (pedal form):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\ \frac{dp}{dr}$$

ಸಾಧನೆ: $p=r$ ಸೈನ್ϕ.

$$\frac{dp}{dr}=\text{ಸೈನ್}\,\phi+r\ \text{ಕಾಸ್}\,\phi\cdot\frac{d\phi}{dr}$$

$$=r\frac{d\theta}{ds}+r\frac{dr}{ds}\ \frac{d\phi}{dr}$$

$$=r\frac{d}{ds}(\theta+\phi)=r\frac{d\psi}{ds}=\frac{r}{\rho}$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\cdot\frac{dp}{dr}.$$

(5) ಸ್ಪರ್ಶ ಧ್ರುವೀಯ $(p-\psi)$ ರೂಪ (tangential polar form:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p+(d^2p/d\psi^2)}.$$

ಸಾಧನೆ (1): $r^2=r^2$ ಸೈನ್$^2\phi+r^2$ ಕಾಸ್$^2\phi$

$$=p^2+r^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

$$= p^2 + \left(r \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dp}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{ds} \right)^2$$

$$= p^2 + \left(\frac{dp}{d\psi} \right)^2,$$

$$\because \quad r \frac{dr}{dp} = \rho = \frac{ds}{d\psi}.$$

$$\therefore \qquad 2r\frac{dr}{dp} = 2p + 2\frac{dp}{d\psi} \cdot \frac{d^2p}{d\psi^2} \cdot \frac{d\psi}{dp}.$$

$$\therefore \qquad \rho = p + \frac{d^2p}{d\psi^2},$$

ಸಾಧನೆ (2): $\dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dp}{dr}$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{d\psi} = r\frac{dr}{ds} = r \text{ ಕಾಸ್ } \phi$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2p}{d\psi^2} = \frac{dr}{d\psi} \text{ ಕಾಸ್ } \phi - r \text{ ಸೈನ್ } \phi \frac{d\phi}{d\psi}$$

$$= \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} \text{ ಕಾಸ್ } \phi - r \text{ ಸೈನ್ } \phi \cdot \frac{d}{d\psi}(\psi - \theta)$$

$$= \rho \text{ ಕಾಸ್}^2 \phi - r \text{ ಸೈನ್ } \phi \cdot \left(1 - \frac{d\theta}{d\psi}\right)$$

$$= \rho \text{ ಕಾಸ್}^2 \phi + r \text{ ಸೈನ್ } \phi \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} - r \text{ ಸೈನ್ } \phi$$

$$= \rho \text{ ಕಾಸ್}^2 \phi + \rho \text{ ಸೈನ್}^2 \phi - r \text{ ಸೈನ್ } \phi$$

$$= \rho - p$$

$$\therefore \qquad \rho = p + \frac{d^2p}{d\psi^2}.$$

(6) ಧ್ರುವೀಯ ರೂಪ (polar form):

$$\frac{1}{\rho}=\frac{r^2+2\dot{r}^2-\ddot{r}r}{(r^2+\dot{r}^2)^{3/2}}$$

ಸಂಗತ, ಬಿಂದುಗಳು θ ವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಅಂತರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ (1): $\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$$\therefore \frac{-2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr}=\frac{-2}{r^3}-\frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^4}\cdot 2\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d^2r}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dr}.$$

ಎಂದರೆ, $\dfrac{1}{p^3}\dfrac{dp}{dr}=\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{2}{r^5}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-\dfrac{1}{r^4}\dfrac{d^2r}{d\theta^2}.$

$$\therefore \qquad \frac{dp}{r\,dr}=p^3\left[\frac{1}{r^4}+\frac{2}{r^6}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{r^5}\frac{d^2r}{d\theta^2}\right].$$

$$\therefore \qquad \rho=\frac{r\,dr}{dp}=\frac{r^6}{p^3}\left[r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]^{-1}$$

$$=\frac{r^6\left[\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}$$

$$=\frac{\left[r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

ಸಾಧನೆ (2) : $\psi = \theta + \phi$

$$\therefore \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right) \quad .... \quad \text{(i)}$$

ಈಗ,
$$\frac{ds}{d\theta} = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{1/2} \quad .... \quad \text{(ii)}$$

ಅಲ್ಲದೆ,
$$\text{ಕಾಟ್}\,\phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta}.$$

$$\therefore \quad -\text{ಕೋಸೆಕ್}^2\phi \frac{d\phi}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r}\,\frac{d^2r}{d\theta^2}}{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \quad .... \quad \text{(iii)}$$

ಈಗ (ii) ಮತ್ತು (iii) ನ್ನು (i) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

ಸಾಧನೆ (3) : ಉದಾ. 6, § 12.4 ನೋಡಿ.

(7) $u-\theta$ ನಿರ್ದೇಶಕ ರೂಪ ($u-\theta$ form) :

$$\frac{1}{\rho}=\frac{u^3(u+\ddot{u})}{(u^2+\dot{u}^2)^{3/2}}$$

ಸಂಗತ, ಬಿಂದುಗಳು θ ವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಅಂತರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ (1) : $\frac{1}{p^2}=u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$

$$\therefore \qquad \frac{-2}{p^2}\cdot\frac{dp}{dr}=2u\frac{du}{dr}+2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dr}.$$

ಆದರೆ, $u=\frac{1}{r}$; $\therefore \frac{du}{dr}=-\frac{1}{r^2}=-u^2$;

ಮತ್ತು $$\frac{d\theta}{dr}=\frac{d\theta}{du}\cdot\frac{du}{dr}=-u^2\frac{d\theta}{du}.$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr}=u^3+u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{dp}{rdr}=p^3u^3\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

$$=\frac{u^3\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}{\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ಸಾಧನೆ (2) : ಮೇಲಿನ (6) ರ ವ್ಯಕ್ತಕದ (expression) ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಕಗಳನ್ನು r^6 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{r} + \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}{\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ಈಗ $u = \frac{1}{r}$. $\therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$.

ಮತ್ತು $$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2}{r^3}\frac{dr}{d\theta} - \frac{1}{r^3}\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $y - 5 = 3(x-2)^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $x = 1$ ಮತ್ತು $x = 3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ನತೆಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸಿ.

$$y' = 9(x-2)^2 ; \quad y'' = 18(x-2)$$

$\therefore$ $x = 1$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y' = 9$ ಮತ್ತು $y'' = -18$;
$\therefore$ ಪ್ರವಣತೆ $= y''/\,|\,(1+y'^2)^{3/2}\,| = -18/\,|\,(82)^{3/2}\,|$.
ಮತ್ತೆ $x = 3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y' = 9$ ಮತ್ತು $y'' = 18$;
$\therefore$ ಪ್ರವಣತೆ $= 18/\,|\,(82)^{3/2}\,|$.

ಪ್ರವಣತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯು y'' ನ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $x = 1$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y'' < 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಅಧೋನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ. $x = 3$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $y'' > 0$ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ.

2. $y^2=4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ $y'=2a/y$, ಮತ್ತು $y''=-4a^2/y^3$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho}=\frac{-1}{2a}\cdot\frac{|y|^3}{y^3}=\frac{-1}{2a}\cdot\frac{|y|}{y}.$$

$\therefore$ $y>0$ ಆದಾಗ ಪ್ರವಣತೆಯು $-1/2a$ ಆಗಿಯೂ, ಮತ್ತು $y<0$ ಆದಾಗ ಪ್ರವಣತೆಯು $+1/2a$ ಆಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. $y=0$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ $\psi=-\pi/2$ ಆಗುತ್ತದೆ; $\therefore$ $y=0$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು x–ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸೇರಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ ಅಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{1}{2}a$ ಆಗುತ್ತದೆ. [$x=at^2$, $y=2at$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ ಪ್ರವಣತೆಯು $\frac{-1}{2a}\cdot\frac{|t|^3}{t^3}$ ಆಗುತ್ತದೆ.]

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನು ವಿಚಾರಿಸಿ.

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},\ \text{ಮತ್ತು}\ y''=-\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{1}{y^3}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho}=\frac{-a^4b^4}{|(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}|}\cdot\frac{y}{|y|}.$$

$\therefore$ $y\gtrless 0$ ಆದಂತೆ, ಪ್ರವಣತೆಯು $\mp\frac{a^4b^4}{|(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}|}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$y=0$ ಆದಾಗ $x=\pm a$ ಆಗುತ್ತದೆ. $(a, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ದಿಶೆಯು $\psi=\pi/2$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಈ ಬಿಂದುವು x–ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗಿರುವ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ ಆಗ ಅಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತೆಯು a/b^2 ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ $(-a, o)$ ಎಂಬ ಬಿಂದು

ವಿನಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಅನುಸರಿಸಲ್ಪಡುವುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಅಲ್ಲಿ $\psi = -\pi/2$ ಆಗುವುದರಿಂದ ಆ ಬಿಂದುವು x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲುಗಡೆ ಇರುವ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೇರಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ. $\therefore$ ಆಗ ಅಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತೆಯು $(-a/b^2)$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: (1) ಈ ಫಲಗಳನ್ನು $x = a$ ಕಾಸ್θ, $y = b$ ಸೈನ್θ ಎಂಬ ಪರಮಾನ ರೂಪದಿಂದಲೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

(2) $a = b$ ಆದಾಗ, ಅವಲುಪ್ತಿಯು ವರ್ತುಳವಾಗುತ್ತದೆ.

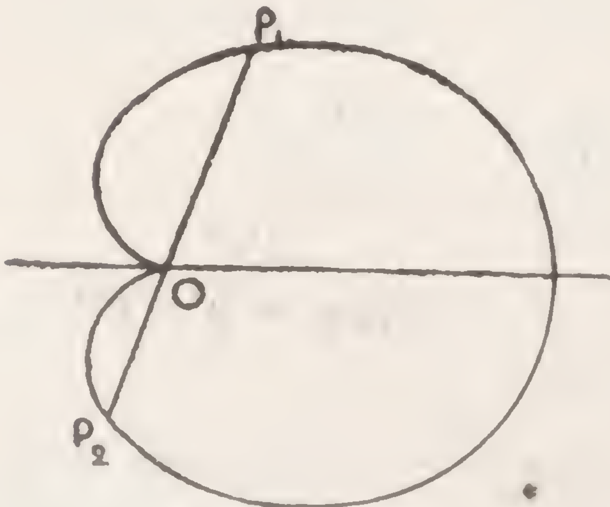
4. $r = a(1 +$ ಕಾಸ್$\theta)$ ಎಂಬ ಹೃದ್ವಲಯದಲ್ಲಿ ಧೃವದಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಛೇದಕವು ಹೃದ್ವಲಯವನ್ನು ಮತ್ತೆ P_1, P_2 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. P_1, P_2 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತೆಯು $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ ಆದರೆ,

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{16a^2}{9}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಹೃದ್ವಲಯದ $p - r$ ಸಮೀಕರಣವು $r^3 = 2ap^2$.

(ಉದಾ. 5, ಅಭ್ಯಾಸ 8).



ಆಕೃತಿ 12-3

$$\therefore \quad \rho = r\frac{dr}{dp} = \tfrac{2}{3}(2ar)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4a}{3} \text{ ಕಾಸ್} \frac{\theta}{2}.$$

ಈಗ P_1 ಬಿಂದುವು (r_1, θ_1) ಆದರೆ, P_2 ಬಿಂದುವು $(r_2, \theta_1 + 180°)$ ಆಗುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 12–3).

$$\therefore \quad \rho_1 = \frac{4a}{3} \text{ ಕಾಸ್} \frac{\theta_1}{2}; \qquad \rho_2 = \frac{-4a}{3} \text{ ಸೈನ್} \frac{\theta_1}{2}.$$

$$\therefore \qquad \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{16a^2}{9}$$

5. $$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2x/dy^2}{\text{ಕೊಸೆಕ್}^3\psi}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{dx}{dy} = \text{ಕಾಟ್}\,\psi$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು s ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$\frac{d^2x}{dy^2} \cdot \frac{dy}{ds} = -\text{ಕೊಸೆಕ್}^2\psi \cdot \frac{d\psi}{ds}$$

ಆದರೆ, $dy/ds = \text{ಸೈನ್}\,\psi$, ಮತ್ತು $d\psi/ds = 1/\rho$.

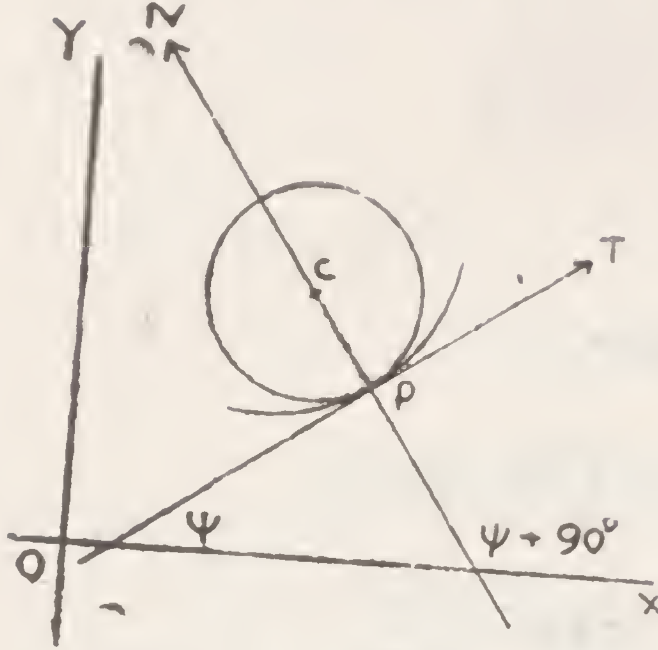
6. dy/dx ಮತ್ತು d^2y/dx^2 ಗಳಿಗೆ 3, § 8.21 ಮತ್ತು ಉದಾ. 3, ಅಭ್ಯಾಸ 8 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೂಪಗಳನ್ನು (2), § 12.4 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಪ್ರವಣತೆಯ $r-\theta$ ರೂಪವನ್ನು [(6), § 12.4] ಪಡೆಯಿರಿ.

12.5. ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳ (circle of curvature).

ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವನ್ನು § 12.4 ರಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಆ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಮೊದಲು, ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. ದತ್ತ ಬಿಂದುವು $P(x, y)$, ಮತ್ತು ತದನುಗುಣವಾದ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು $C(\alpha, \beta)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. C ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದು

ವಿನ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, ಆ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಧನ ದಿಶೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ $(\psi + 90°)$. ρ ನಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (§ 12.4).



ಆಕೃತಿ 12-4

ಆದ್ದರಿಂದ $\rho > o$ ಆದಾಗ, PC ಎಂಬ ದಿಕ್ಕು OX ದಿಕ್ಕಿಗೆ $\psi + 90°$ ಕೋನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 12-4), ಮತ್ತು $|\rho| = \rho$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{\alpha - x}{\text{ಕಾಸ್}(\psi + 90°)} = \frac{\beta - y}{\text{ಸೈನ್}(\psi + 90°)} = -\rho.$$

ಮತ್ತೆ, $\rho < 0$ ಆದಾಗ, PC ಎಂಬ ದಿಕ್ಕು OX ದಿಕ್ಕಿಗೆ $\psi - 90°$ ಕೋನದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 12-5), ಮತ್ತು $|\rho| = -\rho$. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{\alpha - x}{\text{ಕಾಸ್}(\psi - 90°)} = \frac{\beta - y}{\text{ಸೈನ್}(\psi - 90°)} = -\rho.$$

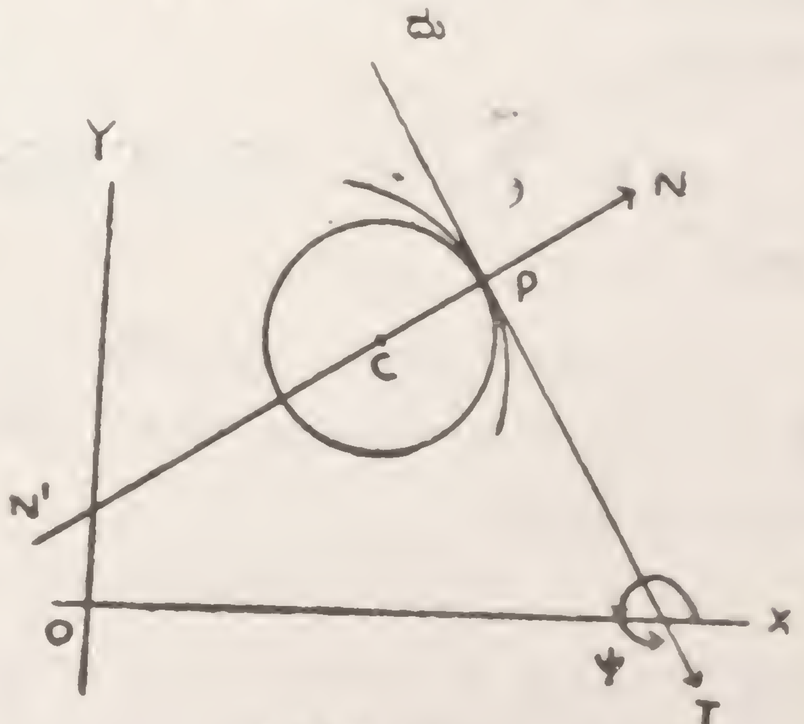
ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಎರಡು ಪಕ್ಷಗಳಲ್ಲೂ, ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರದನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$\alpha = x - \rho\,\text{ಸೈನ್}\,\psi$;

$\beta = y + \rho\,\text{ಕಾಸ್}\,\psi$ .... (i)

ಈಗ,

$\text{ಟ್ಯಾನ್}\,\psi = y'$.



ಆಕೃತಿ 12-5

$$\therefore \qquad \text{ಕಾಸ್}\,\psi = \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)}}\,;\ \text{ಸೈನ್}\,\psi = \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}.$$

ಅಲ್ಲದೆ,
$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} \qquad [(2), \S\, 12.4].$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (i) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ,

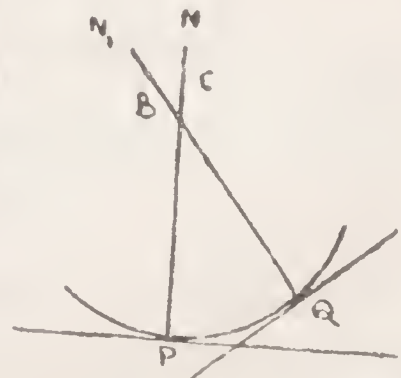
$$\alpha = x - y' \cdot \frac{1+y'^2}{y''}\,;\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿ, ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

ಒಂದು ವರ್ತುಳವು ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವು, (i) P ಎಂಬ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರಬೇಕು, (ii) P ಎಂಬಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಬೇಕು, ಮತ್ತು (iii) P ಎಂಬಲ್ಲಿ $d\psi/ds$ ನ ಬೆಲೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಗೂ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ಮೂರು ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟದೆ. ಆದರೆ, ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಇತರ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದಲೂ ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳನ್ನು ಈಗ ವಿಚಾರಿಸೋಣ.

(1) ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P $(x = x_1)$ ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಬಿಂದು. ಮತ್ತು Q $(x = x_1 + \delta x)$ ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 12–6). ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ PN′ ಮತ್ತು QN′ ಎಂಬ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ B ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ, $\delta x \to 0$ ಆದಂತೆ, B ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವಾದ C ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ, PN ಮತ್ತು QN′ ಎಂಬ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು



ಆಕೃತಿ 12-6

$$(y - y_1)\text{ ಟ್ಯಾನ್}\psi + (x - x_1) = 0 \quad .... \quad \text{(iv)}$$

ಮತ್ತು

$$[y - (y_1 + \delta y)]\text{ ಟ್ಯಾನ್}(\psi + \delta\psi) + [x - (x_1 + \delta x)] = 0.$$

ಈ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ,

$$(y - y_1)[\text{ಟ್ಯಾನ್}(\psi + \delta\psi) - \text{ಟ್ಯಾನ್}\psi] - \delta y\text{ ಟ್ಯಾನ್}(\psi + \delta\psi) - \delta x = 0$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$(y - y_1)\frac{d}{dx}\text{ಟ್ಯಾನ್}\psi - \frac{dy}{dx}\text{ಟ್ಯಾನ್}\psi - 1 = 0.$$

ಆದರೆ, ಟ್ಯಾನ್ $\psi = y'$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$y - y_1 = \frac{1 + y'^2}{y''}; \quad \therefore y = y_1 + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

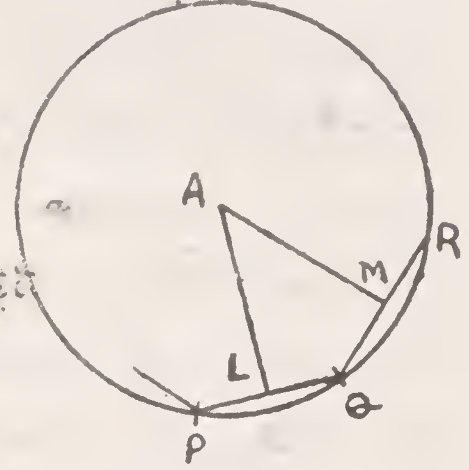
ಈಗ (iv) ರಿಂದ,

$$x - x_1 = -y'\frac{(1 + y'^2)}{y''}; \qquad \therefore x = x_1 - y'\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

x ಮತ್ತು y ಗಳ ಈ ಬೆಲೆಗಳು B ಬಿಂದುವಿನ ಪರಿಮಿತಿಯಾದ C ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು. $\therefore$ ಮೇಲಿನ (ii) ರಿಂದ, C ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ, B ಬಿಂದುವಿನ ಪರಿಮಿತಿಯಾದ C ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, CP ಯನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವರ್ತುಳವು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ, ಕೇಂದ್ರ B, ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ BP ಉಳ್ಳ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು P ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವಾಗುತ್ತದೆ.

(2) ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು. P ಎಂಬ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ, Q, R ಎಂಬ ಇನ್ನೆರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಈ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವ ವರ್ತುಳವನ್ನೆಳೆಯೋಣ (ಆಕೃತಿ 12-7). PQ, QR ಎಂಬ ಛೇದಕಗಳ (secants) ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು L, M ಆದರೆ, L, M ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಈ ಛೇದಕಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ A ಎಂಬ ಬಿಂದುವೇ ಈ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ. ಈಗ P, Q ಬಿಂದುಗಳು (x_1, y_1) ಮತ್ತು $(x_1+\delta x, y_1+\delta y)$ ಆದರೆ, LA ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು



ಆಕೃತಿ 12-7

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-\overline{x_1+\delta x})^2+(y-\overline{y_1+\delta y})^2,$$

ಎಂದರೆ, $2(x-x_1)\delta x+2(y-y_1)\delta y=(\delta x)^2+(\delta y)^2.$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x\to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$(x-x_1)+(y-y_1)y'=0.$$

ಆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ. ಆದ್ದರಿಂದ Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ, LA ರೇಖೆಯ ಪರಿಮಿತಿಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ರೇಖೆಯಾಗುಗತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, Q ಬಿಂದುವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದು R ಬಿಂದುವು Q ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದರೆ, ಆಗ MA ರೇಖೆಯ ಪರಿಮಿತಿಯು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬ ರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ದತ್ತ

ರೇಖೆಗೆ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1+\delta x, y_1+\delta y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಪರಿಮಿತಿಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಮೇಲೆ (1) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ PQR ಎಂಬ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವಾಗುತ್ತದೆ.

(3) ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿರ್ಣಯಿಸಬಹುದು. ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವುದೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ d^2y/dx^2 ನ ಬೆಲೆಯು ರೇಖೆಗೂ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವರ್ತುಳವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ವರ್ತುಳವೇ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳ. ಏಕೆಂದರೆ, ಆಗ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರೇಖೆಗೂ, ವರ್ತುಳಕ್ಕೂ $d\psi/ds$ ನ ಬೆಲೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ಪ್ರವಣತೆಯ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ರೂಪದಿಂದ [(2), § 12.4] ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ.

ಸ್ಪರ್ಶದ ಅಧಿಷ್ಠಾನ (order of contact).

$y=f(x)$, $y=\phi(x)$ ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೆ $P(x=x_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x_1)=\phi(x_1)$ ಆದರೆ, ಆಗ ಆ ರೇಖೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೆ $f(x_1)=\phi(x_1)$ ಮತ್ತು $f'(x_1)=\phi'(x_1)$ ಆದರೆ, ರೇಖೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ $f(x_1)=\phi(x_1)$, $f'(x_1)=\phi'(x_1)$ ಮತ್ತು $f''(x_1)=\phi''(x_1)$ [ಆದರೆ $f'''(x_1)\neq\phi'''(x_1)$] ಆದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶವು ವಿಶೇಷ ರೀತಿಯದು; ಅದು ಎರಡನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಸ್ಪರ್ಶ (contact of the second order) ಅಥವಾ ತ್ರಿ-ಬಿಂದು ಸ್ಪರ್ಶ (three-pointic contact) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x_1)=\phi(x_1)$, $f'(x_1)=\phi'(x_1)$, . . . , $f^n(x_1)=\phi^n(x_1)$, ಆದರೆ

$$f^{n+1}(x_1)\neq\phi^{n+1}(x_1)$$

ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶವು n ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಸ್ಪರ್ಶ ಅಥವಾ $(n+1)$ – ಬಿಂದು ಸ್ಪರ್ಶ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವು ಆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ವರ್ತುಳವು ಮೂರು ಸ್ವತಂತ್ರ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಂದ ನಿಯತವಾಗುವುದರಿಂದ, ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶದ ಅಧಿಷ್ಠಾನವು ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನದಾಗಿರುವುದು ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವರ್ತುಳಗಳ ಪೈಕಿ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದ ಸ್ಪರ್ಶವೇ ಅತ್ಯಂತ ನಿಕಟವಾದ ಸ್ಪರ್ಶ (closest contact).

ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅವಲೋಕಿಸಿ, ಅದರ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $y=f(x)$ ಎಂಬ ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಬಿಂದು $x=x_1$ ನಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವು $y=\phi(x)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಮತ್ತು $y=\phi(x)$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\phi'(x)=0;$$

ಪುನರಂತರಣದಿಂದ,

$$1+[\phi'(x)]^2+(y-\beta)\phi''(x)=0.$$

ಆದರೆ,

$\phi(x_1)=f(x_1)$, $\phi'(x_1)=f'(x_1)$ ಮತ್ತು $\phi''(x_1)=f''(x_1)$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ

$$(x_1-\alpha)+(y_1-\beta)f'(x_1)=0,$$

ಮತ್ತು $$1+[f'(x_1)]^2+(y_1-\beta)f''(x_1)=0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು α, β ಗಳಿಗೆ ಬಿಡಿಸಿದರೆ (solve),

$$\alpha = x_1 - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \text{ ಮತ್ತು } \beta = y_1 + \frac{(1+y'^2)}{y''}$$

ಸಂಗತ $$y' = f'(x_1 ; y'' = f''(x_1),$$

ಅಲ್ಲದೆ, $$\rho^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

α, β ಮತ್ತು ρ ಗಳಿಗೆ ಈ ವ್ಯಕ್ತಕಗಳನ್ನು (expressions) ಈ ಮೇಲೆ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನದಿಂದ ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆಯಷ್ಟೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $3y = x^3 - 9x + 13$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ (2, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ, ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $y' = 1$, ಮತ್ತು $y'' = 4$.

$$\therefore \quad \text{ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯ} = |\rho| = \frac{|(1+y'^2)^{3/2}|}{|y''|}$$

$$= \frac{|\sqrt{2}|}{2}.$$

ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು (α, β) ಆದರೆ, ಆಗ

$$\alpha = x - y'\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{3}{2}; \ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{3}{2}.$$

$\therefore$ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x - \tfrac{3}{2})^2 + (y - \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{1}{2};$$

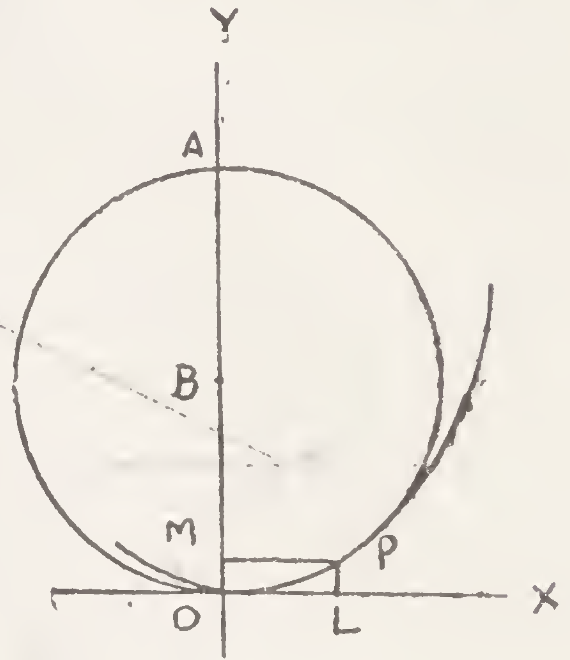
ಎಂದರೆ, $$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 4 = 0.$$

2. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ x – ಅಕ್ಷವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಅಲ್ಲಿನ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು

$$|\rho| = |\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{x\to 0} \frac{x^2}{2y}|$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. (ನ್ಯೂಟನ್).

ದತ್ತ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ $P(x, y)$ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. x – ಅಕ್ಷವನ್ನು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವ ವರ್ತುಳವು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ (ಆಕೃತಿ 12–8). ಈ ವರ್ತುಳವು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ 0, 0, P ಎಂಬ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವುದರಿಂದ, P ಬಿಂದುವು O ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ಈ ವರ್ತುಳದ ಪರಿಮಿತಿಯು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ PM ರೇಖೆಯು y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟರೆ, $PM^2 = OM \cdot MA$.



ಆಕೃತಿ 12-8

$\therefore\ MA = x^2/y$. $\therefore\ x\to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯಲ್ಲಿ

$$MA \to 2|\rho|.$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ y – ಅಕ್ಷವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ

$$|\rho| = |\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{y\to 0} \frac{y^2}{2x}|.$$

3. ದತ್ತ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಧ್ರುವದ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವ ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕದ (chord of curvature passing through the pole) ಉದ್ದವು $|2\rho$ ಸೈನ್ $\phi|$, ಎಂದರೆ $\left|2p\frac{dr}{dp}\right|$, ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಆಕೃತಿ 12-9 ರಲ್ಲಿ PQ ಎಂಬ ಛೇದಕದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಆಕೃತಿ 12-9

$$PQ = |PR \text{ ಕಾಸ್ } \angle RPQ|$$
$$= |2\rho \text{ ಕಾಸ್}(90^\circ - \phi)|$$
$$= |2\rho \text{ ಸೈನ್ } \phi|$$
$$= \left|2r\frac{dr}{dp} \cdot \frac{p}{r}\right|$$
$$= \left|2p\frac{dr}{dp}\right|,$$

12.6. ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗಳು (evolutes).

P ಎಂಬ ಪ್ರಚಲಿತ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದಂತೆ ಅದರ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವಾದ C ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಅನುಸರಿಸುವ ಪಥವು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ **ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ** (ತಂತುಜನಕ ರೇಖೆ, evolute; that which evolves) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖೆಯು **ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆ** (ತಂತುಜನಿತ ರೇಖೆ, involute) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ದತ್ತ ರೇಖೆಗೂ ಅದರ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗೂ ಇರುವ ಮುಖ್ಯವಾದ ಎರಡು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(i) ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಅದರ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: $y=f(x)$ ಎಂಬ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ $P(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು $C(\alpha, \beta)$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$\alpha = x-\rho \text{ ಸೈನ್ } \psi, \text{ ಮತ್ತು } \beta = y+\rho \text{ ಕಾಸ್ } \psi.$$

$f(x)$ ರೇಖೆಯ ಕಂಸಾಂಶವು ds ಆದರೆ, ಆಗ

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - \rho \text{ ಕಾಸ್ } \psi \frac{d\psi}{ds} - \frac{d\rho}{ds} \text{ಸೈನ್ } \psi$$

$$= -\frac{d\rho}{ds}\text{ಸೈನ್ } \psi$$

$$\left[\because \frac{dx}{ds} = \text{ಕಾಸ್ } \psi; \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}\right];$$

$$\text{ಮತ್ತು } \frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - \rho \text{ ಸೈನ್ } \psi \frac{d\psi}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\text{ಕಾಸ್ } \psi$$

$$= \frac{d\rho}{da}\text{ಕಾಸ್ } \psi$$

$$\left[\because \frac{dy}{ds} = \text{ಸೈನ್}\,\psi; \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}\right].$$

ಈಗ, ಭಾಗಹಾರದಿಂದ

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\text{ಕಾಟ್}\,\psi.$$

ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು $y = \phi(x)$ ಆದರೆ, C (α, β) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅದರ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು (slope) $d\beta/d\alpha$. ಅಲ್ಲದೆ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬ ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು ($-$ ಕಾಟ್ ψ). ಆದ್ದರಿಂದ $y = f(x)$ ಎಂಬ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ $P(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬರೇಖೆಯು $y = \phi(x)$ ಎಂಬ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು C (α, β) ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಕಂಸಾಂಶವು ds, ಮತ್ತು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತೆಯು $1/\rho$, ಆದರೆ, ಆಗ

$$(ds)^2 = (d\rho)^2.$$

ಸಾಧನೆ: ಮೇಲೆ (i) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ,

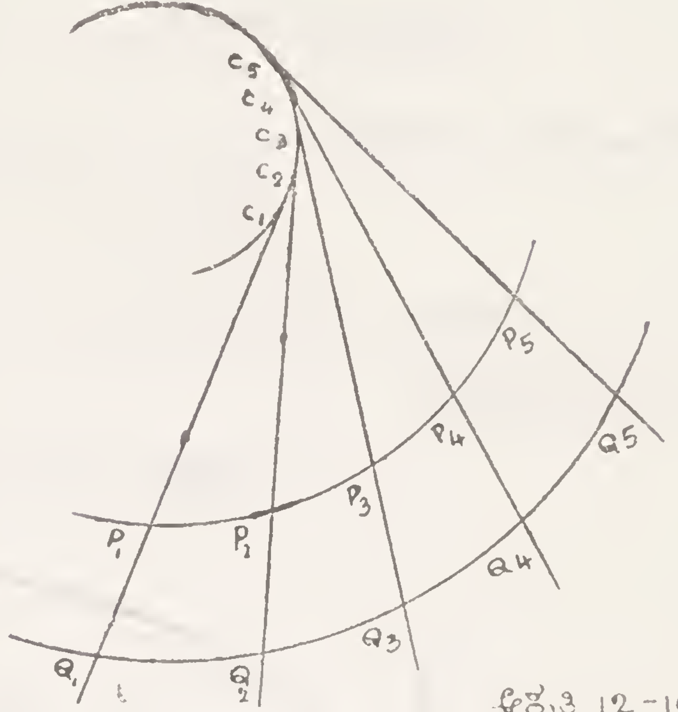
$$d\alpha = -(\text{ಸೈನ್}\,\psi)d\rho; \quad \text{ಮತ್ತು} \quad d\beta = (\text{ಕಾಸ್}\,\psi)d\rho.$$

$$\therefore \qquad (ds)^2 = (d\alpha)^2 + (d\beta)^2 = (d\rho)^2.$$

ವಿಕಾಸ ತಂತು (evolving thread).

ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಒಂದು ತಂತುವಿನ (ದಾರದ) ಮೂಲಕ ಚಿತ್ರಿಸಬಹುದು. ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗೆ C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 . . . ಎಂಬ ದಾರವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 12–10). ಆ ರೇಖೆಯಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ C_1P_1 ಎಂಬ ದಾರದ ಭಾಗವು ಆ ರೇಖೆಯನ್ನು C_1 ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. P_1 ಎಂಬುದು ದಾರದ ಮೇಲೆ ಇಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಚುಕ್ಕೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ದಾರವನ್ನು ಸದಾ ಬಿಗಿಯಾಗಿರುವಂತೆ ಹಿಡಿದು, ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯಿಂದ ಕ್ರಮೇಣ

ಬಿಡಿಸುತ್ತ ಹೋದರೆ, ಆಗ P_1 ನ ಪಥವು $P_1P_2P_3$ . . . ಎಂಬ ರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ದಾರದ ಭಾಗವು ಯಾವಾಗಲೂ ಆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು $P_1P_2P_3$.... ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $C_1C_2C_3$.... ರೇಖೆಯು ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ, ಮತ್ತು $P_1P_2P_3$....ರೇಖೆಯು ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ಅಥವಾ ತಂತುಜನಿತ ರೇಖೆ ಮತ್ತೆ Q_1 ಎಂಬುದು ತಂತುವಿನ ಮೇಲೆ ಇಡಲ್ಪಟ್ಟ ಇನ್ನೊಂದು ಚುಕ್ಕೆಯಾದರೆ, ಆಗ $Q_1Q_2Q_3$.... ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $C_1C_2C_3$ .. ರೇಖೆಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಕಾಸ ಜನ್ಯ ರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ $C_1C_2C_3$ ... ಎಂಬ ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ವಿಕಾಸ ಜನ್ಯ ರೇಖೆಗಳು ಅಸಂಖ್ಯಾತವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆ ರೇಖೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಮತ್ತೆ $C_1C_2C_3$ . . . ರೇಖೆಯು $P_1P_2P_3$ . . . ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರ ಪಥವಾದ್ದರಿಂದ, $P_1C_1 = \rho_1$, $P_2C_2 = \rho_2$, ಇತ್ಯಾದಿ. C_1C_2 ಎಂಬ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $\rho_2 - \rho_1$ ಎಂಬ ಅಂಶವು ತಂತುವು ಬಿಡಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿರುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಈ ತಂತುವಿಗೆ ವಿಕಾಸತಂತುವೆಂದು ಹೆಸರು.



ಆಕೃತಿ 12-10

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x = at^2$, $y = 2at$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ (parabola) ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{2at^3}$$

$$\therefore \qquad \alpha = x - y' \cdot \frac{1+y'^2}{y''} = 3at^2 + 2a$$

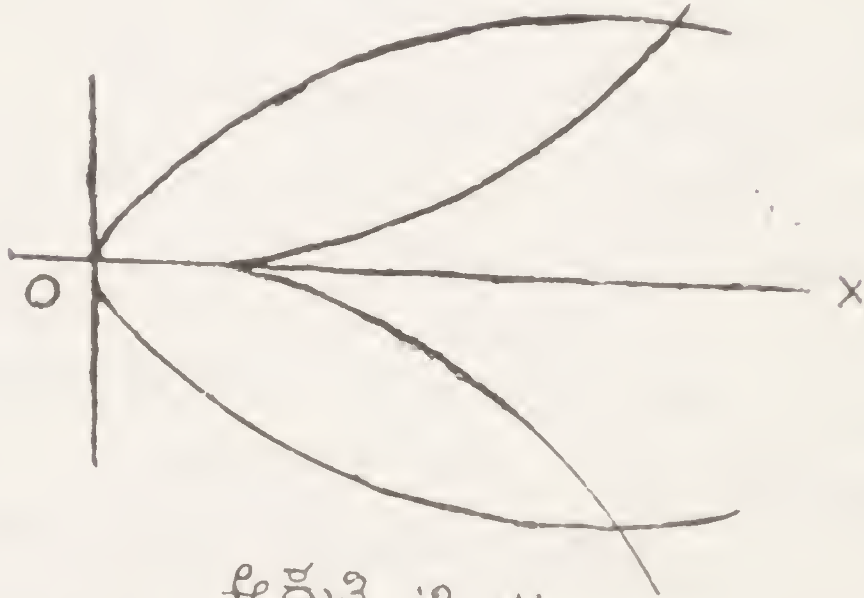
$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = -2at^3$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$27a\beta^2 = 4(\alpha - 2a)^3$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ α, β ಗಳಿಗೆ ಬದಲು x, y ಹಾಕಿದರೆ

$$27ay^2 = 4(x - 2a)^3$$



ಆಕೃತಿ 12 – 11

ಎಂಬ ವಿಕಾಸ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಇದೊಂದು ಘನಾರ್ಧ ಪರಿಕ್ಷೇಪ (semi-cubical parabola) (ಆಕೃತಿ 12–11).

2. $x = a$ ಕಾಸ್θ, $y = b$ ಸೈನ್θ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯ (ellipse) ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\text{ಕಾಟ್}\,\theta; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\text{ಸೈನ್}^3\theta}.$$

$$\therefore \qquad \alpha = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$= a \text{ ಕಾಸ್}\theta - \frac{1}{a} \text{ಕಾಸ್}\theta \, (a^2 \text{ಸೈನ್}^2\theta + b^2 \text{ಕಾಸ್}^2\theta).$$

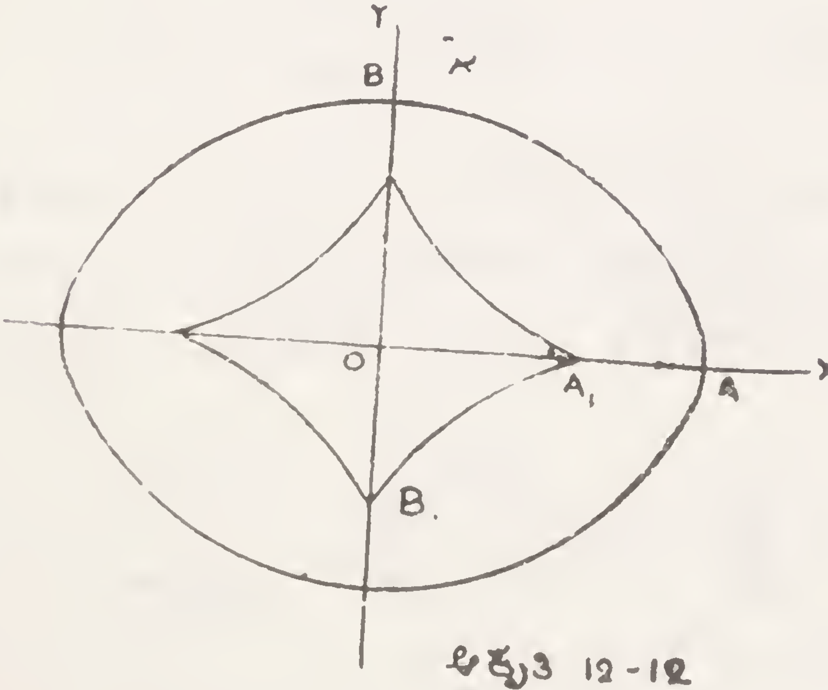
$$\therefore \qquad a\alpha = (a^2 - b^2)\text{ಕಾಸ್}^3\theta$$

ಹೀಗೆಯೇ $$b\beta = -(a^2 - b^2)\text{ಸೈನ್}^3\theta$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ θವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ

$$(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

ಎಂಬ ಸಂಬಂಧವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.



ಆಕೃತಿ 12-12

ಇದರಲ್ಲಿ α, β ಗಳಿಗೆ ಬದಲು x, y ಹಾಕಿದರೆ,

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

ಎಂಬ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 12-12).

3. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಕಂಸದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಕೃತಿ 12–12 ರಲ್ಲಿ A, B ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರಗಳು A_1, B_1. $\therefore\ AA_1 = |\rho_A|$, ಮತ್ತು $BB_1 = |\rho_B|$. $\therefore\ |\rho_B| - |\rho_A| =$ ಕಂಸ B_1A_1. $\therefore$ ಸಮಸಂಗತಿಯಿಂದ (symmetry), ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಇಡೀ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $4(|\rho_B| - |\rho_A|)$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $x = a$ಕಾಸ್θ, $y = b$ ಸೈನ್θ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

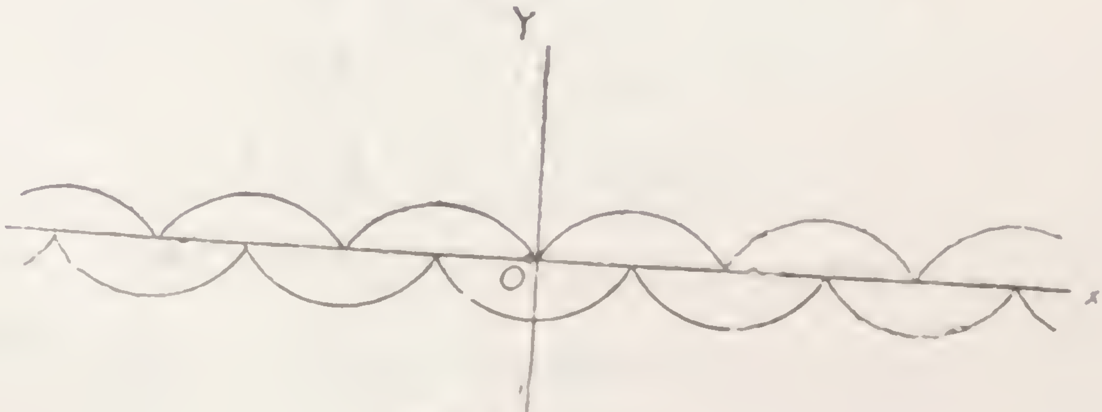
$$\rho = \frac{-1}{ab}(a^2 \text{ ಸೈನ್}^2\theta + b^2 \text{ ಕಾಸ್}^2\theta)^{3/2}$$

A ಬಿಂದುವಿಗೆ $\theta = 0$. $\therefore\ |\rho_A| = b^2/a$. ಮತ್ತೆ. B ಬಿಂದುವಿಗೆ $\theta = \pi/2$. $\therefore\ |\rho_B| = a^2/b$. $\therefore$ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು

$$4\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right).$$

4. $x = a(\theta - \text{ಸೈನ್}\theta)$, $y = a(1 - \text{ಕಾಸ್}\theta)$ ಎಂಬ ಚಾಕ್ರೇಯದ (cycloid) ವಿಕಾಸ ರೇಖೆಯು $x = a(\theta + \text{ಸೈನ್}\theta)$, $y = -a(1 - \text{ಕಾಸ್}\theta)$ ಎಂಬ ಇನ್ನೊಂದು ಚಾಕ್ರೇಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \text{ಕಾಟ್}\frac{\theta}{2};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4a \text{ ಸೈನ್}^4\frac{\theta}{2}}$$



ಚಿತ್ರ 12-13

$\therefore \quad \alpha = a(\theta - \text{ಸೈನ್}\,\theta) + 2a\ \text{ಸೈನ್}\,\theta = a(\theta + \text{ಸೈನ್}\,\theta)$;

$\beta = a(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta) - 2a(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta) = -a(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta)$.

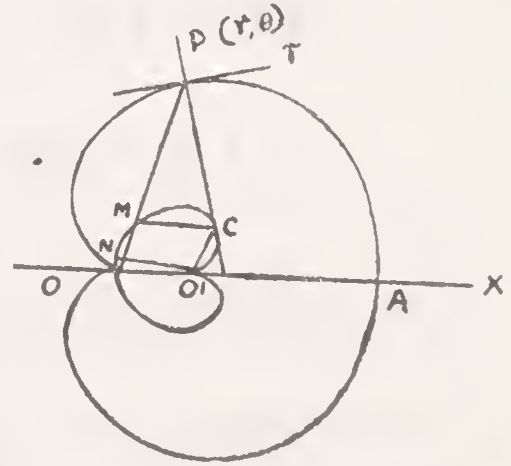
ಆಕೃತಿ 12 13 ರಲ್ಲಿ x–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲುಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆ, ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ರೇಖೆಯು ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ. ಈ ಎರಡು ಚಾಕ್ರೇಯುಗಳಿಗೂ ಆಧಾರ ಚಕ್ರದ ತ್ರಿಜ್ಯವು (a) ಒಂದೇ [(4) ; § 16.3].

5. ಒಂದು ಹೃದ್ವಲಯದ (cardioid) ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಹೃದ್ವಲಯವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ದತ್ತ ಹೃದ್ವಲಯವು $r = a(1 + \text{ಕಾಸ್}\,\theta)$, $|\theta| \leqslant \pi$, ಎಂದೂ, ಅದರ ಮೇಲೆ $P(r, \theta)$, ಎಂಬುದೊಂದು ಬಿಂದುವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 12–14). P ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು C ಆದರೆ, ಆಗ

$$PC = |\rho| = \frac{4a}{3}\text{ಕಾಸ್}\frac{\theta}{2}$$

(ಉದಾ. 4, § 12.4). ಆದ್ದರಿಂದ $A(\theta = 0)$ ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು O' ಆದರೆ,



ಆಕೃತಿ 12-14

$$AO' = 4a/3. \qquad \therefore \quad OO' = 2a/3 = OA/3.$$

ಅಲ್ಲದೆ O ಎಂಬ ಧ್ರುವಕ್ಕೆ $\theta = \pi$ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ $\rho = 0$. $\therefore$ O' ಮತ್ತು O ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯಮೇಲಿವೆ. ಈಗ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗೆ O' ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ $O'A$ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ C ಬಿಂದುವು (r', θ') ಆದರೆ, $r' = O'C$ ಮತ್ತು $\theta' = AO'C$. ಈಗ $\theta' = \theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

$$\angle OPC = \angle OPT - \angle CPT = \phi - 90^\circ = \theta/2.$$

ಈಗ C ಮತ್ತು O′ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ CM, O′N ರೇಖೆಗಳು OP ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಆಗ

$$CM = PC \text{ ಸೈನ್}\frac{\theta}{2} = \frac{4a}{3} \text{ ಕಾಸ್}\frac{\theta}{2}\text{ಸೈನ್}\frac{\theta}{2} = \frac{2a}{3} \text{ ಸೈನ್}\,\theta;$$

ಮತ್ತು $$O'N = OO' \text{ ಸೈನ್}\,\theta = \frac{2a}{3} \text{ ಸೈನ್}\,\theta.$$

$\therefore$ CM = O′N. ಅಲ್ಲದೆ CM‖O′N. $\therefore$ O′C‖OP.

$$\therefore \quad \theta' = \angle AOC = \angle AOP = \theta.$$

ಮತ್ತೆ $r' = O'C = NM = OP - ON - MP$

$$= OP - OO' \text{ ಕಾಸ್}\,\theta - PC \text{ ಕಾಸ್}\,\theta/2$$

$$= a(1 + \text{ಕಾಸ್}\,\theta) - \frac{2a}{3} \text{ ಕಾಸ್}\,\theta - \frac{4a}{3} \text{ ಕಾಸ್}^2\theta$$

$$= \frac{a}{3}(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta) = \frac{a}{3}(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta').$$

$\therefore$ O′ ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ O′A ರೇಖೆಯನ್ನು ಆದಿ ರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

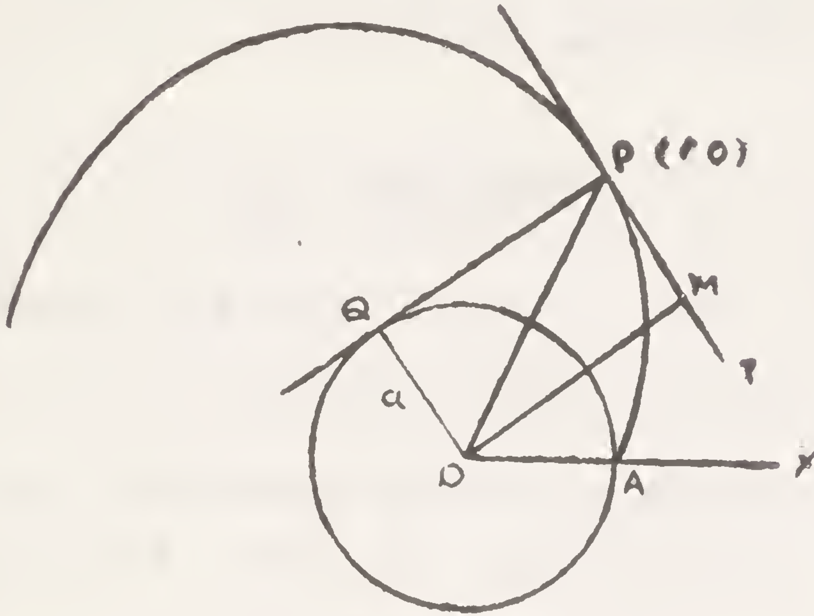
$$r = \frac{a}{3}(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಒಂದು ಹೃದ್ವಲಯವಷ್ಟೆ.

6. $$\theta = \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{a} - \text{ಕಾಸ್}^{-1}\frac{a}{r}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $r = a$ ಎಂಬ ವರ್ತುಲದ ವಿಕಾಸ ಜನ್ಯರೇಖೆ (involute) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ವಿಕಾಸ ತಂತುವಿನ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸೋಣ. ದತ್ತ ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ a. OX ಎಂಬ ಆದಿ ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳ ವನ್ನು A ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಆಕೃತಿ 12–15). A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಸುತ್ತಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ವಿಕಾಸತಂತುವು A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ,



ಆಕೃತಿ 12–15

ಸದಾ ಬಿಗಿಯಾಗಿರುವಂತೆ, ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲ್ಪಡುತ್ತಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ AQ ಕಂಸದಷ್ಟು ತಂತುವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಿದಾಗ, ತಂತುವಿನ ಸ್ಥಾನವು QP ಆದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಯಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಯಷ್ಟೆ. QP ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು Q ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. P ಬಿಂದುವು (r, θ) ಆದರೆ, $OP = r$ ಮತ್ತು $\angle AOP = \theta$. ಈಗ $\angle AOQ = \psi$ ಆದರೆ, $PQ =$ ಕಂಸ $AQ = a\psi$. ಅಲ್ಲದೆ,

$$PQ^2 = r^2 - a^2. \quad \therefore \ \psi = [\sqrt{(r^2 - a^2)}]/a.$$

ಮತ್ತೆ, $\angle POQ = \phi$ ಆದರೆ, $\phi =$ ಕಾಸ್$^{-1}(a/r)$.

$$\therefore \quad \theta = \psi - \phi = \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{a} - \text{ಕಾಸ್}^{-1}\frac{a}{r}.$$

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಇದು ವಿಕಾಸ ಜನ್ಯರೇಖೆಯ ಧ್ರುವೀಯ ಸಮೀಕರಣ. ಈ ರೇಖೆಯ $r - p$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಆಕೃತಿ 12–15 ರಿಂದ ಸುಲಭ

ವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ OM ಎಂಬ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದರೆ, ಆಗ $OM = p$. ಈಗ, OMPQ ಎಂಬ ದೀರ್ಘ ಚತುರಸ್ರದಿಂದ (ಆಯ, rectangle),

$$r^2 = p^2 + a^2$$

ಎಂಬ $p-r$ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 12

1. $y = x(1-x^2)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ (1, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನೂ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $x(x+3y) = x^3 + 2y^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ (2, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆಯನ್ನೂ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $y = x + 3x^2 - x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನ ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

i) $y^2 = 4ax$, (0, 0);

ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$;

iii) $x^3 + y^3 = 3axy$, $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$;

iv) $y = e^x$, (0, 1);

v) $x = a(\theta -$ ಸೈನ್ $\theta)$, $y = a(1 -$ ಕಾಸ್ $\theta)$, ಬಿಂದು θ.

vi) $x = a$ ಕಾಸ್$^3 t$, $y = a$ ಸೈನ್$^3 t$, ಬಿಂದು t.

5. $27y^2 = 4(x-2)^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ (5, 2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತೆ, ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯ, ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $2y = -x^2 + 4x - 2$ ಮತ್ತು $2y = x^2 - 4x + 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ $x = 2$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳವು ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (parabola) ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದಿಕ್‌ಸ್ತಂಭದ (directrix) ವರೆಗಿನ ಲಂಬ ರೇಖಾ ಖಂಡದ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ನಾಭಿಗತ ಛೇದಕವೊಂದರ (focal chord) ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ρ_1, ρ_2 ಆದರೆ,

$$\rho_1^{-\frac{2}{3}} + \rho_2^{-\frac{2}{3}} = (2a)^{-\frac{2}{3}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ (ellipse) ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ab ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ CP, CD ರೇಖೆಗಳು ಅನುಬದ್ಧ ವ್ಯಾಸಾರ್ಧಗಳಾದರೆ (semi-conjugate diameters), P ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು CD^3/ab ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅಲ್ಲದೆ, P, D ಬಿಂದುಗಳ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ρ_1, ρ_2 ಆದರೆ,

$$(ab)^{\frac{2}{3}}(\rho_1^{\frac{2}{3}} + \rho_2^{\frac{2}{3}}) = a^2 + b^2$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $y = c$ ಕಾಷ್(x/c) ಎಂಬ ತಂತ್ರೀ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ (cantenary) ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x–ಅಕ್ಷದ ವರೆಗಿನ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

12. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು (x, y) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು

$$\tfrac{1}{2}ab(ax + by)^{-\frac{3}{2}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

13. $xy = c^2$ ಎಂಬ ಸಮಾತಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (rectangular hyperbola)

$$2c^2\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. $y =$ ಲಾಗ್x ಎಂಬ ಲಘುವಿುತಿ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠವಾದ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು $(3\sqrt{3})/2$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

15. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ $\rho_{(r,\,\theta)}$ನ ವ್ಯಕ್ತಕಗಳನ್ನು (expressions) ಸಾಧಿಸಿ :

ರೇಖೆ	$\rho_{(r,\,\theta)}$
i) $r(1 +$ ಕಾಸ್$\theta) = 2a$,	$2r^{3/2}/a^{1/2}$:
ii) $r = a(1 +$ ಕಾಸ್$\theta)$,	$\frac{2}{3}(2ar)^{1/2}$;
iii) $r^2 = a^2$ಕಾಸ್2θ,	$a^2/3r$;
iv) $r = ae^{\theta \text{ಕಾಟ್} \alpha}$,	r^2/p ;
v) $r^m = a^m$ಕಾಸ್$m\theta$,	$a^m/[m + 1)r^{m-1}]$.

16. $r = ae^{\theta \text{ಕಾಟ್} \alpha}$ ಎಂಬ ಪರಿಭ್ರಮಿಯನ್ನು (spiral) ಧ್ರುವದಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ದಿಗ್ರೇಖೆಯು $P_1, P_2, P_3 \ldots,$ $P_n \ldots$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. P_n ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು ρ_n ಆದರೆ,

$$\frac{1}{m-n} \text{ಲಾಗ್} \frac{\rho_m}{\rho_n}$$

ನ ಪ್ರಮಾಣವು ಸ್ಥಿರಿಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

17. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಧ್ರುವಸಾರಿತ ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕವನ್ನು (chord of curvature through the pole) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $r = a(1 + \text{ಕಾಸ್}\theta)$; (ii) $r = ae^{\theta \text{ಕಾಟ್} \alpha}$.

18. $y = a$ ಲಾಗ್ ಸೆಕ್(x/a) ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕವು ಸ್ಥಿರಲಾಂಬಿ (of constant length) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

19. ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ (parabola) ನಾಭಿಸಾರಿತ ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕವು (chord of curvature through the focus) ರೇಖೆಯು ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೆಂದೂ, ಅದರ ಉದ್ದವು ನಾಭಿಯಿಂದ (focus) ದತ್ತ ಬಿಂದುವಿನ ದೂರದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದೆಯೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

20. $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

i) $\rho = \frac{2\sqrt{a}}{a}(x+a)^{\frac{3}{2}}$;

ii) ದತ್ತ ಪರಿಕ್ಷೇಪವು ತನ್ನ ವಿಕಾಸಿರೇಖೆಯನ್ನು $(8a, \pm 4a\sqrt{2})$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ;

iii) $(8a, \pm 4a\sqrt{2})$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ $(2a, \mp 2a\sqrt{2})$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ;

iv) ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗೆ $(2a, 0)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ;

v) ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿರುವ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $4a(3\sqrt{3}-1)$.

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯ ಅತಿರೇಕವು (eccentricity) $1/\sqrt{2}$ ಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಲ್ಲವಾದರೆ, ಅವಲುಪ್ತಿಯು ತನ್ನ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

22. $x=ct,\ y=c/t$ ಎಂಬ ಸಮಾತಿಕ್ಷೇಪದ (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು (α, β) ಆದರೆ,

$$\alpha+\beta=\frac{c}{2t^3}(1+t^2)^3;\quad \alpha-\beta=\frac{c}{2t^3}(1-t^2)^3$$

ಎಂದೂ, ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು

$$(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=(4c)^{2/3}$$

ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿ. [ಉದಾ. 3, § 13.4 ನೋಡಿ].

23. $x=a$ ಕಾಸ್$^3\theta$, $y=a$ ಸೈನ್$^3\theta$ ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯಲ್ಲಿ (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು (α, β) ಆದರೆ,

$\alpha+\beta=a($ಕಾಸ್$\theta+$ಸೈನ್$\theta)^3$, $\alpha-\beta=a($ಕಾಸ್$\theta-$ಸೈನ್$\theta)^3$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ; ಮತ್ತು ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}$$

ಎಂದು ಅಭ್ಯೂಹಿಸಿ (deduce).

24. ಒಂದು ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯ (astroid) ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಯು (involute) ಇನ್ನೊಂದು ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

[(3), § 16.3 ನೋಡಿ].

25. $x = c\left(\text{ಕಾಸ್}\,t + \text{ಲಾಗ್ ಟ್ಯಾನ್}\,\frac{t}{2}\right),$

$y = c\,\text{ಸೈನ್}\,t$

ಎಂಬ ಪಥಾನುವರ್ತಿಯ (tractrix) ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು $y = c$ ಕಾಷ್(x/c) ಎಂಬ ತಂತ್ರೀರೇಖೆ (catenary) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

26. ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು

$$\left[\frac{1}{2}\frac{d^2r^2/dy^2}{d^2x/dy^2},\ \frac{1}{2}\frac{d^2r^2/dx^2}{d^2y/dx^2}\right]$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

27. ρ ನ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವ್ಯಕ್ತಕಗಳನ್ನು (expressions) ಸಾಧಿಸಿ :

i) $\rho = \dfrac{r\ \text{ಕೋಸೆಕ್}\,\phi}{1 + (d\phi/d\theta)^2}$;

ii) $\rho = \dfrac{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}$.



ಅಧ್ಯಾಯ XIII

ಆಚ್ಛಾದಕಗಳು

(envelopes)

13.1. ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮಗಳು (systems of curves).

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ λ ಎಂಬುದು ಪರಮಾನವಾದರೆ(parameter), ಆಗ λ ಗೆ ಬೇರೆಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಂತೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ, λ ಪರಮಾನವಾದಾಗ $f(x, y, \lambda) = 0$ ಎಂಬುದೊಂದು ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, m ಪರಮಾನವಾದಾಗ $y = mx$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಮೂಲಬಿಂದು ಸಂಗತವಾದ (concurrent) ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮು. ಮತ್ತೆ a ಪರಮಾನವಾದಾಗ $y^2 = 4ax$ ಎಂಬುದೊಂದು ಪರಿಕ್ಷೇಪ ಪ್ರಕ್ರಮು (system of parabolas).

13.2. ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯ ನಿರೂಪಣೆ.

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

ಮತ್ತು
$$f(x, y, \lambda + \delta\lambda) = 0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಛೇದಕ ಬಿಂದುವು Q ಆಗಿ, $\delta\lambda \to 0$ ಆದಂತೆ Q ಬಿಂದುವಿನ ಪರಿಮಿತಿಯು P ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಆಗ λ ವಿಸ್ವಭಾವಿಸಿದಂತೆ P ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು $f(x, y, \lambda) = 0$ ಎಂಬ ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮುದ ಆಚ್ಛಾದಕವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ

$$y = mx + \frac{a}{m}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ a ಎಂಬುದೊಂದು ಪ್ರಬದ್ಧವಾದ ಸ್ಥಿರ (fixed constant) ಮತ್ತು m ಎಂಬುದೊಂದು ಪರಮಾನ (parameter) ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಈಗ ಈ ಸರಳರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮದ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$y = mx + \frac{a}{m}, \text{ ಮತ್ತು } y = (m + \delta m)x + \frac{a}{m + \delta m}$$

ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳು Q ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x, y ಗಳಿಗೆ ವಿಘಟಿಸುವುದರಿಂದ (solve) Q ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು

$$x = \frac{a}{m(m + \delta m)}, \quad y = a\frac{2m + \delta m}{m(m + \delta m)}$$

ಆಗುತ್ತವೆ. ಈಗ $\delta m \to 0$ ಆದರೆ Q ಬಿಂದುವು

$$P\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$$

ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ m ಪರಮಾನವಾದಾಗ P ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ – ಎಂದರೆ, ದತ್ತ ಸರಳರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮದ ಆಚ್ಛಾದಕದ – ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x = \frac{a}{m^2}, \quad y = \frac{2a}{m}$$

ಆಗುತ್ತವೆ. ಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣದಿಂದ m ಎಂಬ ಪರಮಾನವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ. ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y^2 = 4ax$$

ಎಂಬ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

13.3. ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ವಿಧಾನ.

ದತ್ತ ಒಂದು ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮದ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸೂಕ್ತನೆನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $f(x, y, \lambda) = 0$ ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಕ್ರಮದಲ್ಲಿ

$$f(x, y, \lambda) = 0, \quad f(x, y, \lambda + \delta\lambda) = 0$$

ಎಂಬ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ,

$$f(x, y, \lambda + \delta\lambda) - f(x, y, \lambda) = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{f(x, y, \lambda + \delta\lambda) - f(x, y, \lambda)}{\delta\lambda} = 0, \; (\delta\lambda \neq 0).$$

ಈಗ $\delta\lambda \to 0$ ಆದರೆ, ಪರಿಮಿತಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0.$$

$$f(x, y, \lambda) = 0, \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು ದತ್ತರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮದ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯ ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳು. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು x, y ಗಳಿಗೆ ಬಿಡಿಸಿ

$$x = \phi(\lambda), \quad y = \psi(\lambda)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆವಶ್ಯಕವಾದಾಗ ಇವುಗಳಿಂದ λ ವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಹೀಗೆ, $f(x, y, \lambda)=0$ ಎಂಬ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು λ ಗೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸಿ $\partial f/\partial\lambda=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆದು, ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ λ ವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮತ್ತೆ $y=mx+\dfrac{a}{m}$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ

$$f(x, y, m)=y-mx-\frac{a}{m}=0$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial f}{\partial m}=-x+\frac{a}{m^2}=0.$$

ಈಗ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ m ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, $y^2=4ax$ ಎಂಬ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

13.4. ಆಚ್ಛಾದಕ ಮತ್ತು ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ.

ಈಗ, ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸೋಣ. ಮೇಲಿನ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ $f(x, y, \lambda)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\lambda}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\lambda}+\frac{\partial f}{\partial\lambda}=0.$$

ಆದರೆ $\partial f/\partial\lambda=0$, ಮತ್ತು $x=\phi(\lambda)$, $y=\psi(\lambda)$.

$$\therefore \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\phi'(\lambda)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(\lambda)=0$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{\psi'(\lambda)}{\phi'(\lambda)} = -\frac{f_x(x, y, \lambda)}{f_y(x, y, \lambda)}.$$

ಈಗ λ ಗೆ λ_1 ಎಂಬ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $[\phi(\lambda_1), \psi(\lambda_1)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಆಚ್ಛಾದಕದ ಮೇಲಿರುವುದಲ್ಲದೆ, $f(x, y, \lambda_1) = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೂ ಇದೆ; ಏಕೆಂದರೆ, $x = \phi(\lambda)$, $y = \psi(\lambda)$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಾಗ $f(x, y, \lambda) = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಆಚ್ಛಾದಕದ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು $\psi'(\lambda_1)/\phi'(\lambda_1)$; ಮತ್ತು ಇದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x, y, \lambda_1) = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು $[-f_x(x, y, \lambda_1)/f_y(x, y, \lambda_1)]$. ಇವೆರಡೂ ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯು $f(x, y, \lambda_1) = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು $[\phi(\lambda_1), \psi(\lambda_1)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿರುವ $y = mx + \frac{a}{m}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಆಚ್ಛಾದಕ ರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಷ್ಟೆ. ವಸ್ತುಶಃ **ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖೆಯೂ ತನ್ನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವಾಗಿದೆಯೆಂಬ** ಅಂಶವು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಕ (analytical) ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ,

$$x = \phi(\lambda), \quad y = \psi(\lambda)$$

ಎಂಬುದೊಂದು ದತ್ತ ರೇಖೆಯಾದರೆ, ಆದರ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮವು

$$f(x, y, \lambda) = y - \psi(\lambda) - m[x - \phi(\lambda)] = 0 \quad .... \quad \text{(i)}$$

ಸಂಗತ $$m = \psi'(\lambda)/\phi'(\lambda).$$

(i) ನ್ನು λ ಎಂಬ ಪರಮಾನಕ್ಕೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$-\psi'(\lambda) + m\phi'(\lambda) - \frac{dm}{d\lambda}[x - \phi(\lambda)] = 0.$$

ಎಂದರೆ,

$$\frac{dm}{d\lambda}[x - \phi(\lambda)] = 0.$$

$\therefore$ λ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ

$$x = \phi(\lambda). \qquad \ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ, (i) ರ ಆಚ್ಛಾದಕವು

$$x = \phi(\lambda),\ y = \psi(\lambda).$$

ಎಂದರೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವು ದತ್ತರೇಖೆ.

ಇದರಿಂದ ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಭ್ಯೂಹವನ್ನು (deduction) ಪಡೆಯುಬಹುದು. ಅದೇನೆಂದರೆ, **ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಲಂಬ ರೇಖಾ ಪ್ರಕ್ರಮದ ಆಚ್ಛಾದಕವು ಆರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಿರೇಖೆ.** ಏಕೆಂದರೆ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ವಿಕಾಸಿರೇಖೆಯ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. [(i), § 12·6], ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಆ ರೇಖೆಯ ಲಂಬಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನಾಗಿಯೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$(x-\lambda)^2 + y^2 = c^2\lambda^2$$

ಎಂಬ ವರ್ತುಳಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ (λ ಪರಮಾನ).

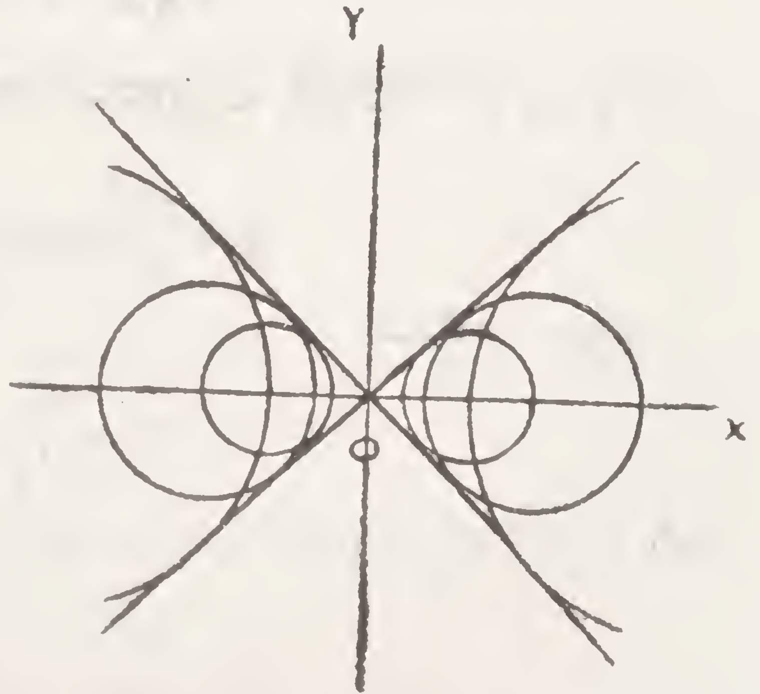
ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು λ ದ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$x - \lambda = -c^2\lambda.$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ λ ವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, ಆಚ್ಛಾದಕವು

$$y^2 = \frac{c^2}{1-c^2}x^2$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖಾಯುಗಳ (ಆಕೃತಿ 13–1).



ಆಕೃತಿ 13–1

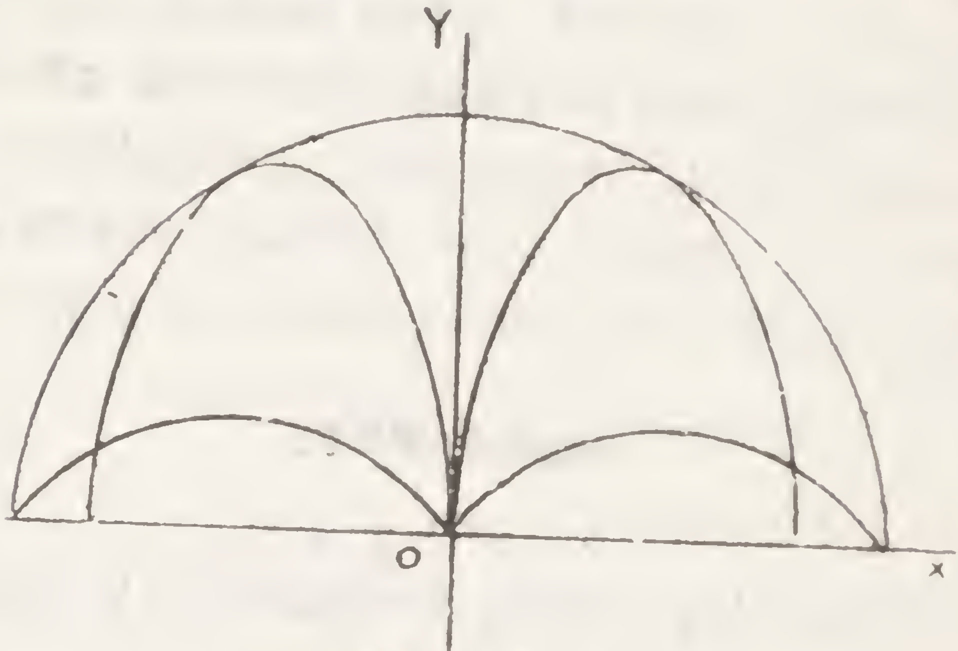
2. $x = u(\text{ಕಾಸ್}\,\alpha)t, \quad y = u(\text{ಸೈನ್}\,\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$

ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (α ಪರಮಾನ).

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$y = mx - \frac{gx^2}{2u^2}(1 + m^2) \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

ಸಂಗತ $m = \text{ಟ್ಯಾನ್}\,\alpha$. ಈಗ m ನ್ನು ಪರಮಾನವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು



ಆಕೃತಿ 13 - 2

(i) ನ್ನು m ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$x - \frac{gx^2}{u^2}m = 0.$$

∴ ಎಲ್ಲ x ಗಳಿಗೂ

$$m = \frac{u^2}{2g}. \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

ಈಗ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಿಂದ m ನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ. ಆಚ್ಛಾದಕವು

$$y - \frac{u^2}{2g} = \frac{-g}{2u^2}x^2$$

ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪ (ಆಕೃತಿ 13–2).

3. $x = ct$, $y = c/t$ ಎಂಬ ಸಮಾಂತಿವಲಯದ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - \frac{c}{t} = t^2(x - ct).$$

ಇದನ್ನು ಪರಮಾನವಾದ t ಗೆ ಪಾಕ್ಷಿಕವಾಗಿ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$\frac{c}{t^2} = 2tx - 3ct^2.$$

ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸೋಣ.

$$x = \frac{c}{2}\left(3t + \frac{1}{t^3}\right), \quad y = \frac{c}{2}\left(\frac{3}{t} + t^3\right).$$

$$\therefore \quad x + y = \frac{c}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)^3, \quad x - y = \frac{-c}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)^3.$$

$$\therefore \quad (x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = (4c)^{2/3}.$$

[ಉದಾ. 22, ಅಭ್ಯಾಸ XII ನೋಡಿ.]

ಅಭ್ಯಾಸ 13

1. $y = mx + \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (m ಪರಮಾನ).

2. $(x - \lambda)^2 + y^2 = a^2$ ಎಂಬ ವೃತ್ತಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (λ ಪರಮಾನ).

3. $(y - \lambda)^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (λ ಪರಮಾನ).

4. $y^2=(x+\lambda)^3$ ಎಂಬ ಘನಾರ್ಧ ಪರಿಕ್ಷೇಪಗಳ (semi. cubical parabolas) ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. x ಕೋಸೆಕ್ $\theta - y$ ಕಾಟ್ $\theta = c$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (θ ಪರಮಾನ).

6. $ab=c^2$ ಆದರೆ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (c ಸ್ಥಿರ).

7. $a+b=c$ ಆದರೆ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಗಳ (ellipses) ಆಚ್ಛಾದಕವು $x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}$ ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿ (astroid) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y^2=4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದಲ್ಲಿ $y-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಛೇದಕಗಳನ್ನು ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ವರ್ತುಳಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವು $y^2=4a(x+a)$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $y^2=4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನುಳ್ಳ, ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವ, ವರ್ತುಳಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವು

$$y^2(2a+x)+x^3=0$$

ಎಂಬ ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆ (cissoid) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $x^2-y^2=a^2$ ಎಂಬ ಅತಿವಲಯದ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರಗಳನ್ನುಳ್ಳ, ಮತ್ತು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವ, ವರ್ತುಳಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವು $r^2=4a^2$ ಕಾಸ್ 2θ ಎಂಬ ದ್ವಿಪತ್ರಿ (lemniscate) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $y^2 = 4x$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪದ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಆಚ್ಛಾದಕವನ್ನಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ XIV

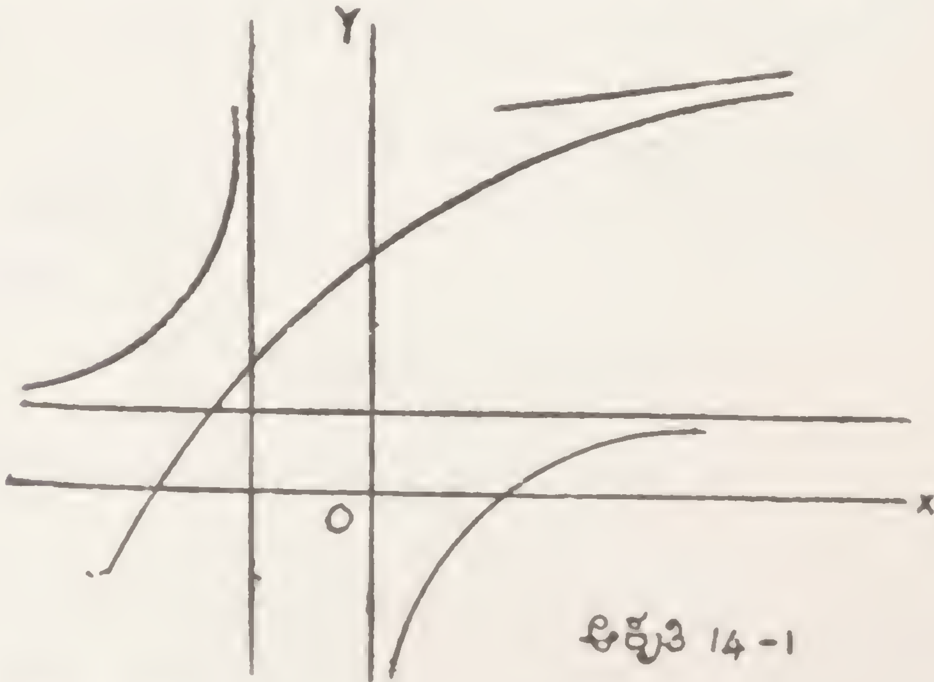
ಅಸಂಪಾತಿಗಳು

(asymptotes)

14.1. ನಿರೂಪಣೆ (definition).

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು, OP$\to\infty$ ಆದಂತೆ, O ಎಂಬ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪರ್ಯಾಪ್ತವಾದ (finite) ದೂರದಲ್ಲಿರುವ AB ಎಂಬ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಪರಿಮಿತಿಸಿದರೆ, ಆಗ AB ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$OP^2=x^2+y^2$ ಆದ್ದರಿಂದ, OP$\to\infty$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಂದಾದರೂ ಅನಂತಕ್ಕೆ ಸಾರಬೇಕು.



ಆಕೃತಿ 14-1

ವರ್ತುಳ, ಅವಲುಪ್ತಿ (ellipse) ಮುಂತಾದ ಆವರಣ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ (closed curves) ಇದು ವಸ್ತುತಃ ಸಾಧ್ಯವಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಅಂಥ

ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ನಿಜವಾದ (real) ಅಸಂಪಾತಿಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ; ಆದರೆ ವಿಶ್ಲೇಷಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ (analytical view) ಅವುಗಳಿಗೆ ಭಾವನಾ (imaginary) ಅಸಂಪಾತಿಗಳಿರಬಹುದು (§ 14.31).

ಈಗ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಸೌಲಭ್ಯಕ್ಕಾಗಿ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು (i) $y=mx+c$ ಎಂಬ ರೂಪದ (ಎಂದರೆ $y-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ) ಅಸಂಪಾತಿಗಳು, ಮತ್ತು (ii) $x=k$ ಎಂಬ ರೂಪದ (ಎಂದರೆ $y-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಿರುವ) ಅಸಂಪಾತಿಗಳು ಎಂದು ವಿಂಗಡಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

14 2. ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ (method of finding asymptotes).

(1) $y=mx+c$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು :

$x\to\infty$ ಆದಂತೆ $f'(x)\to m\,(\neq\infty)$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $x>x_0$ ಆದಾಗಲೆಲ್ಲ $f'(x)\neq\infty$ ಆಗುವಂತೆ x_0 ಎಂಬ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಿರುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. $x_1>x_0$ ಆಗುವಂತೆ $P[x_1, f(x_1)]$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1),$$

ಎಂದರೆ, $y=f'(x_1)\cdot x+[f(x_1)-x_1f'(x_1)]$ .... (i)

ಈಗ $x_1\to\infty$ ಆದಂತೆ

$$f'(x_1)\to m(\neq\infty) \quad \text{.... (ii)}$$

ಆಗುವುದಲ್ಲದೆ,

$$[f(x_1)-x_1f'(x_1)]\to c(\neq\infty) \quad \text{.... (iii)}$$

ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (i) ರ ಪರಿಮಿತಿ ರೂಪವು (limiting form), ಎಂದರೆ ಅಸಂಪಾತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y = mx + c$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

(iii) ನ್ನು x_1 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $x_1 \to \infty$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $f(x)/x \to m$, ಎಂದರೆ ದತ್ತ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $y/x \to m$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಸಂಪಾತಿಯ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವಾದ (slope) m ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು

$$m = \underset{x \to \infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{y}{x}, \; [y = f(x)], \qquad \text{.... (iv)}$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿಯಾಗಿಯೂ, c ಎಂಬ ಸ್ಥಿರವು

$$c = \underset{x \to \infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} (y - mx), \; [y = f(x)], \qquad \text{.... (v)}$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿಯಾಗಿಯೂ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ (v) ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ m ನ ಬೆಲೆಯು (iv) ರಿಂದ ದೊರೆತದ್ದು.

(2) $x = k$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು : ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನು

$$x = \frac{1}{f'(x_1)} \cdot y + \left[x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right]$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ. $OP \to \infty$ ಆದಂತೆ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಮಿತಿ ರೂಪವು $x = k (\neq \infty)$ ಆಗುವುದಾದರೆ, ಆಗ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ (definition)

$$x = k$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$x_1 \to k \text{ ಆದಂತೆ}, \quad f(x_1) \to \infty, \quad f'(x_1) \to \infty,$$

ಮತ್ತು

$$f(x_1)/f'(x_1) \to 0.$$

ಆದರೆ, ಆಗ OP→ ∞ ಆಗುವುದಲ್ಲದೆ, ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ $x=k$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

14.3. ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ರೂಪಿತವಾದ ರೇಖೆಗಳ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು (asymptotes of curves represented by polynomial equations).

x, y ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಸ್ವಭಾವಿಗಳ (variables) n ನೆಯ ಘಾತದ ಬಹುಪದಿಯು

$$f(x, y)=[(a_0y^n+a_1y^{n-1}x+a_2y^{n-2}x^2+\dots+a_nx^n) \\ +(b_0y^{n-1}+b_1y^{n-2}x+\dots+b_{n-1}x^{n-1}) \\ +\dots+(u_0y+u_1x)+v_0]$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ

$$f(x, y)=0$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ರೂಪಿತವಾದ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಹಿಂದಿನಂತೆ, $y=mx+c$ ಮತ್ತು $x=k$ ಎಂಬ ರೂಪಗಳ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(1) $y=mx+c$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು:

ಮೇಲಿನ $f(x, y)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ r ನೆಯ ಘಾತದ ಸಮಘಾತೀಯ ಪದಗಳ ಸಮಾಹಾರವನ್ನು U_r ಎಂದು ಸಂಕೇತಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$f(x, y)=(U_n+U_{n-1}+\dots+U_r+\dots+U_0) \quad \dots \text{(i)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ

$$\begin{aligned} U_r &= p_0y^r+p_1y^{r-1}x+\dots+p_{r-1}yx^{r-1}+p_rx^r \\ &= x^r\left[p_0\left(\frac{y}{x}\right)^r+p_1\left(\frac{y}{x}\right)^{r-1}+\dots+p_r\right] \\ &= x^rg_r\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$x^n g_n\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1} g_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots+x g_1\left(\frac{y}{x}\right)+g_0=0 \ldots .(ii)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. $g_r(y/x)$ ನಲ್ಲಿ (y/x) ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತವು r ಆಗಿರಬಹುದು, ಅಥವಾ r ಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರಬಹುದು (§ 14.31 ನೋಡಿ). ಈಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x^n ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$g_n\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x} g_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots .+\frac{1}{x^n} g_0=0 \quad \ldots . \text{ (iii)}$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $x \rightarrow \infty$ ಆದರೆ, $y/x \rightarrow m(\neq \infty)$ ಆಗುವುದರಿಂದ [(1), § 14.2], ಪರಿಮಿತಿಯಲ್ಲಿ

$$g_n(m)=0 \quad \ldots . \quad \text{(iv)}$$

ಈಗ ಈ m ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು (roots)

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ನಿಜಾಂಕಗಳಾಗಿಯೂ ಕೆಲವು ಭಾವನಾಂಕಗಳಾಗಿಯೂ ಇರಬಹುದು. ವಿಚಾರದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ (theoretical view) ಭಾವನಾ (imaginary) ಅಸಂಪಾತಿಗಳೂ ಗಣನೀಯವಾದುವೇ. ಸಮೀಕರಣ (iv) ರ ಮೂಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು $g_n(m)$ ನ ಘಾತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ n ಅಥವಾ n ಗಿಂತ ಕಡಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಈ ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \ldots$$

ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುವಕ್ಕೆ ಸಮೀಕರಣ (iii) ನ್ನು x ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸೋಣ. ಆಗ,

$$\frac{d}{d x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x y^{\prime}-y}{x^2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\left[g'_n\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}g'_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots\right]\cdot\frac{xy'-y}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2}g_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2}{x^3}g_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right)-\cdots=0 \quad \ldots. \text{ (v).}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು x^2 ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, $x\to\infty$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $(y/x)\to m$ ಮತ್ತು $(y-xy')\to c$ ಆಗುವುದರಿಂದ. [(1) § 14.2].

$$g'_n(m)\cdot(-c)-g_{n-1}(m)=0.$$

ಎಂದರೆ, $$c=-\frac{g_{n-1}(m)}{g'_n(m)},\ \ g'_n(m)\neq 0,\ \ldots. \text{ (vi)}$$

ಇದರಲ್ಲಿ m ಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $m_1, m_2, m_3, \ldots$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹಾಕಿದಂತೆ, ತದನುಗುಣವಾದ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆಗ

$$y=m_1x+c_1,\quad y=m_2x+c_2,\ \ldots$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

m ಮತ್ತು c ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಅನುಕೂಲವಾದ ಒಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ಅದನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ (ii) ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ y ಗೆ ಬದಲು $mx+c$ ಹಾಕೋಣ. ಆಗ

$$x^n g_n\left(m+\frac{c}{x}\right)+x^{n-1}g_{n-1}\left(m+\frac{c}{x}\right)+\cdots+g_0=0.$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನೂ (term) ಟೇಲರ್ ಸಂಸಿದ್ಧಿಯಿಂದ ವಿಸ್ತರಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$x^n\left[g_n(m)+\frac{c}{x}g'_n(m)+\frac{1}{2!}\ \frac{c^2}{x^2}g''_n(m)+\cdots\right]$$
$$+x^{n-1}\left[g_{n-1}(m)+\frac{c}{x}g'_{n-1}(m)+\frac{1}{2!}\ \frac{c^2}{x^2}g''_n(m)+\cdots\right]$$
$$+\cdots=0.$$

ಅಥವಾ x ನ ಘಾತಗಳ ಅವರೋಹಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ (descending order of powers of x)

$$x^n g_n(m)+x^{n-1}[cg'_n(m)+g_{n-1}(m)]+\cdots=0 \cdots \text{(vii)}$$

ಇಲ್ಲಿ x^n ಮತ್ತು x^{n-1} ಗಳ ಸಹವರ್ತನಗಳನ್ನು (co-efficients) ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮೇಲಿನ (iv) ಮತ್ತು (vi) ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಒಂದುವೇಳೆ m ನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $g'(m)=0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಗ c ನ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮೀಕರಣ (vi) ರಿಂದ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣ (v) ನ್ನು ಪುನಃ x ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿ, ಹಿಂದಿನಂತೆ ಸೂಕ್ತವಾದ x ನ ಘಾತದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ

$$\tfrac{1}{2}c^2g''_n(m)+cg'_{n-1}(m)+g_{n-2}(m)=0 \quad \ldots\ \text{(viii)}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಸಮವಾಗಿರುವ m ನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ρ ನ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಸಮೀಕರಣ (vii) ರಲ್ಲಿ x^{n-2} ನ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿದರೂ ಇದೇ ಸಮೀಕರಣ (viii) ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ m ನ ಮೂರು ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ (vii) ರಲ್ಲಿ x^{n-3} ನ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿ c ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ; ಇತ್ಯಾದಿ.

ವಿಧಾನ : $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $y=mx+c$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು,

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y ಗೆ ಬದಲು $y=mx+c$ ಹಾಕಿ, x^n ಮತ್ತು x^{n-1} ಗಳ ಸಹವರ್ತನಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿ, ಹಾಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ m ಮತ್ತು c ಗಳ ಅನುಗುಣವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ; ಒಂದುವೇಳೆ m ನ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ x^{n-2} ನ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿ c ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು ಇತ್ಯಾದಿ. ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯ n ನೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ $y=m$ ಮತ್ತು $x=1$ ಹಾಕಿದರೆ $g_n(m)$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ; ಹೀಗೆಯೇ $(n-1)$ ನೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳಲ್ಲಿ $y=m$ ಮತ್ತು $x=1$ ಹಾಕಿದರೆ $g_{n-1}(m)$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ; ಇತ್ಯಾದಿ. $g_n(m)$, $g_{n-1}(m)$ ಮುಂತಾದ ವ್ಯಕ್ತಕಗಳನ್ನು (expressions) ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಇದೊಂದು ಸುಲಭೋಪಾಯ.

(2) $x=k$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು :

ದತ್ತ ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ $x=k$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ದತ್ತ ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y^n h_n(x) + y^{n-1} h_{n-1}(x) + \cdots + h_0(x) = 0$$

ಎಂದು y ನ ಅವರೋಹಿ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ. ಇದನ್ನು x ನ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಅಂತರಿಸಿದರೆ,

$$[ny^{n-1}h_n(x) + (n-1)y^{n-2}h_{n-1}(x) + \cdots]y'$$
$$+ [y^n h'_n(x) + y^{n-1} h'_{n-1}(x) + \cdots] = 0.$$

ಇದನ್ನು $y^{n-1}y'$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $x \to k$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ § 14.22 ರಿಂದ,

$$h_n(k) = 0$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು (roots) k_1, k_2, k_3, . . . ಆದರೆ, ಆಗ

$$x = k_1,\ x = k_2,\ x = k_3,\ \ldots$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ರೂಪಿತವಾದ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಬಹುದು.

ವಿಧಾನ: ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ y ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತದ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿ, ಹಾಗೆ ಲಭಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣದ [ಎಂದರೆ $h_n(x)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ] ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಈ ಮೂಲಗಳು $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ಆದರೆ, ಆಗ $x=k_1$, $x=k_2$, $x=k_3$, ... ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯನ್ನು x ನ ಘಾತಗಳ ಅವರೋಹಿ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದು, x ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತದ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿ, x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ $y=mx+c$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನೂ ಒಳಗೊಂಡಿವೆ.

14·31. ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದಿ ಸಮೀಕರಣದ ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ನಿಜ ಮತ್ತು ಭಾವನಾ ಅಸಂಪಾತಿಗಳೂ ಸೇರಿ, ಆ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: § 14.3 ರಲ್ಲಿ $y_n(m)$ ಮತ್ತು $h_n(x)$ ಗಳ ಘಾತಗಳು p ಮತ್ತು q ಆದರೆ, ಆಗ ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ನಿಜ ಮತ್ತು ಭಾವನಾ ಅಸಂಪಾತಿಗಳೂ ಸೇರಿ, $p+q$ ಆಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ದತ್ತವಾಗಿರುವ $f(x, y)$ ಎಂಬ ಬಹುಪದಿಯ ಘಾತವು n. ಈಗ $p+q=n$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿರುವ n ನೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳನ್ನು, ಎಂದರೆ

$$U_n = (a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + \cdots + a_r y^{n-r} x^r + \cdots + a_n x^n) \ldots (i)$$

ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

$$U_n = x^n \left[a_0 \left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_r \left(\frac{y}{x}\right)^{n-r} + \cdots + a_n \right] = x^n g_n\left(\frac{y}{x}\right)$$

ಇದರಲ್ಲಿ $y/x = m$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$g_n(m) = (a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_r m^{n-r} + \cdots + a_n) \ldots (ii)$$

ಮೊದಲು $a_0 \neq 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $g_n(m)$ ನ ಘಾತವು n ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ (i) ರಲ್ಲಿ y^n ನ ಸಹವರ್ತನವು a_0 ಆದ್ದರಿಂದಲೂ, ಮತ್ತು ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ y^n ಉಳ್ಳ ಪದವು ಮತ್ತೆಲ್ಲಿ ಬರುವುದೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದಲೂ, ಇಲ್ಲಿ $h_n(x) = a_0$. ಆದ್ದರಿಂದ $h_n(x)$ ನ ಘಾತವು ಸೊನ್ನೆ. ಹೀಗೆ ಇಲ್ಲಿ $p = n$ ಮತ್ತು $q = 0$. $\therefore \ p + q = n$.

ಈಗ ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ (ii) ರಿಂದ $g_n(m)$ ನ ಘಾತವು $n = 1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ y ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತವು y^{n-1}, ಮತ್ತು (i) ರಲ್ಲಿ y^{n-1} ನ ಸಹವರ್ತನವು $a_1 x$. ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ y^{n-1} ಉಳ್ಳ ಪದವು U_{n-1} ನಲ್ಲೂ ಇರಬಹುದಾದರೂ, y^{n-1} ನ ಸಹವರ್ತನದ ಘಾತವು ಅತ್ಯಧಿಕವಾಗಿರುವುದು U_n ನಲ್ಲೇ. ವಸ್ತುಶಃ

$$U_{n-1} = (b_0 y^{n-1} + b_1 y^{n-2} x + \cdots + b_{n-1}).$$

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯಲ್ಲಿ y^{n-1} ನ ಸಹವರ್ತನವು $(a_1 x + b_0)$; ಎಂದರೆ, $h_n(x) = a_1 x + b_0$. ಆದ್ದರಿಂದ $h_n(x)$ ನ ಘಾತವು 1. ಹೀಗೆ ಇಲ್ಲಿ $p = n - 1$ ಮತ್ತು $q = 1$. $\therefore \ p + q = n$.

ಇದೇ ರೀತಿ, $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ ಆದರೆ. ಆಗ (ii) ರಿಂದ $p = n - 2$. ಅಲ್ಲದೆ $h_n(x) = a_2x^2 + b_1x + c_0$. ಆದ್ದರಿಂದ $q = 2$. $\therefore\ p + q = n$

ಹೀಗೆಯೇ, $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_{r-1} = 0$, $a_r \neq 0 (r < n)$ ಆದರೆ, ಆಗ $p = n - r$ ಮತ್ತು $q = r$. $\therefore\ p + q = n$.

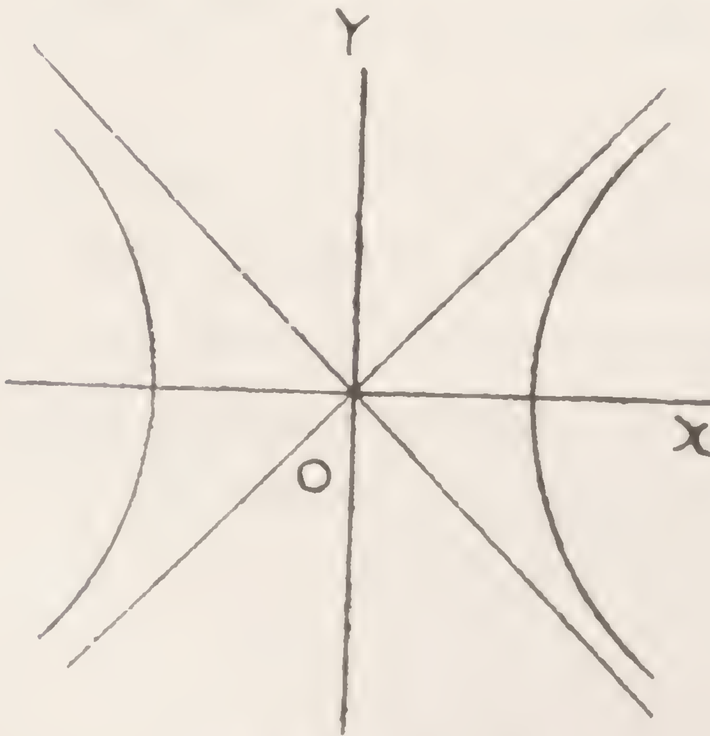
ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಎಂಬ ಅತಿಶ್ಲೇಷದ (hyperbola) ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = mx + c$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mcx - a^2(b^2 + c^2) = 0.$$



ಆಕೃತಿ 14-2

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x^2 ಮತ್ತು x ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$b^2 - a^2m^2 = 0,$$

$$2a^2mc = 0.$$

$$\therefore \qquad m = \pm \frac{b}{a}.$$

$$c = 0.$$

$$\therefore \qquad y = \pm \frac{b}{a}x$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು (ಆಕೃತಿ 14–2).

ಅಥವಾ, $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}.$

$$\therefore \quad m = \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{y}{x} = \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \pm \frac{b}{a}\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = \pm \frac{b}{a};$$

ಮತ್ತು $c = \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} (y - mx)$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \pm \frac{b}{a}\left[\sqrt{(x^2 - a^2)} - x\right] \left(\because \; m = \pm \frac{b}{a}\right)$$

$= 0$, ಲ ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರದಿಂದ.

[(2), § 14.4 ನ್ನೂ ನೋಡಿ].

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಘಾತವು ಎರಡು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಮತ್ತಾವ ಅಸಂಪಾತಿಯೂ ಇಲ್ಲ.

2. $$y(x - y)^2 = x + y$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y ಗೆ ಬದಲು $mx + c$ ಹಾಕಿದರೆ,

$$m(1 - m)^2x^3 + c(1 - m)(1 - 3m)x^2 + [c^2(3m - 2) - (1 + m)]x + c^3 - c = 0.$$

ಇದರಲ್ಲಿ x^3 ನ ಸಹವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$m = 0, \; 1, \; 1$$

ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

x^2 ನ ಸಹವರ್ತನದಲ್ಲಿ $m = 0$ ಹಾಕಿ, ಅದನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಿದರೆ, $c = 0$ ಎಂಬ ಬೆಲೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ x^2 ನ ಸಹವರ್ತನದಲ್ಲಿ $m=1$ ಹಾಕಿದರೆ, ಆಗ ಅದು c ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $m=1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ c ನ ಬೆಲೆಗಳು x^2 ನ ಸಹವರ್ತನದಿಂದ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಸಹವರ್ತನದಲ್ಲಿ $m=1$ ಹಾಕಿ ಅದನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸಬೇಕು. ಆಗ $c=\pm\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. m ಗೆ 1 ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಎರಡುಸಲ ಆವರ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (repeated) c ಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆತಿವೆ.

ಹೀಗೆ, $m=0, 1, 1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ $c=0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ಅನುಗುಣವಾದುವು. ಆದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು

$$y=0, \quad y=x+\sqrt{2}, \quad y=x-\sqrt{2}.$$

ದತ್ತರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಘಾತದಾದ್ದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಮತ್ತಾವ ಅಸಂಪಾತಿಯೂ ಇಲ್ಲ.

3. $$x^2y+xy^2+xy+y^2+3x=0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೊದಲು OX, OY ಎಂಬ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತಗಳು x^2 ಮತ್ತು y^2. ಅಲ್ಲದೆ x^2 ನ ಸಹವರ್ತನವು y, ಮತ್ತು y^2 ನ ಸಹವರ್ತನವು $(x+1)$. ಆದ್ದರಿಂದ $y=0$. $x+1=0$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾಗಿವೆ.

ಆದರೆ, ದತ್ತ ಬಹುಪದಿಯು ಮೂರನೆಯ ಘಾತದ್ದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ (OX, OY ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲದ) ಇನ್ನೊಂದು (ನಿಜ ಅಥವಾ ಭಾವನಾ) ಅಸಂಪಾತಿಯಿರಬೇಕು. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y=mx+c$ ಹಾಕೋಣ. ಆಗ

$$m(m+1)x^3+[c(2m+1)+m(m+1)]x^2+\cdots=0.$$

ಇಲ್ಲಿ x^3 ನ ಸಹವರ್ತನವು ಎರಡನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿವೆ ; ಏಕೆಂದರೆ, ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯು $y-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ. ಈಗ x^3 ನ ಸಹ ವರ್ತನವನ್ನು ಶೂನ್ಯಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ $m=0,\ -1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಈ ಪೈಕಿ $m=0$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯು ಮೇಲೆ ಕಂಡ್ಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ $y=0$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು. ಆದ ರಿಂದ $m=-1$ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. x^2 ನ್ನ ಸಹವರ್ತನದಲ್ಲಿ $m=-1$ ಹಾಕಿದರೆ, $c=0$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದ ರಿಂದ $x+y=0$ ಎಂಬುದೇ ಓರೆಯಾದ (ತಿರ್ಯಕ್, oblique) ಅಸಂಪಾತಿ.

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು

$$y=0,\ x+1=0 \text{ ಮತ್ತು } x+y=0.$$

14·4. ವಿಶೇಷ ರೂಪಗಳು (special forms).

ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, ಅವು ಗಳ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ವಿಧಾನಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸುಲಭವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವುದು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ರೂಪಗಳು ಗಮನಾರ್ಹವಾದುವು.

(1) ದತ್ತ ರೇಖೆಯು

$$(y-mx)P_{n-1}(x,\ y)+Q_{n-1}(x,\ y)=0$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $P_{n-1}(x,\ y)$ ನಲ್ಲಿ $n-1$ ನೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ, ಮತ್ತು $Q_{n-1}(x,\ y)$ ನಲ್ಲಿ $(n-1)$ ನ್ನು ಮೀರದ ಘಾತಗಳ ಪದಗಳಿವೆ; $y-mx$ ಎಂಬ ಅಪವರ್ತನವು n ನೆಯ ಘಾತದ ಪದಸಮೂಹದ ಅನಾವರ್ತ ಅಪವರ್ತನ. ಇಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ದತ್ತ ರೇಖೆಗೆ $y=mx+c$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿ ಯಿರುತ್ತದೆ. c ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - mx = -\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುಲ್ಪಡಲಿ. $x \to \infty$ ಆದಂತೆ, $y/x \to m$ ಮತ್ತು $(y - mx) \to c$ ಆಗುವುದರಿಂದ (§ 14.2),

$$c = \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \left(-\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} \right)_{y=mx.}$$

ಉದಾಹರಣೆ

$(y - x)(y - 2x)(x^2 + xy + y^2) - y^3 + x^2 - 2y + 1 = 0$
ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y - x = \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \left[\frac{y^3 - x^2 + 2y - 1}{(y - 2x)(x^2 + xy + y^2)} \right]_{y=x}$$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{-3x^3} = -\tfrac{1}{3}.$$

$\therefore\ y - x = -\frac{1}{3}$ ಎಂಬುದೊಂದು ಅಸಂಪಾತಿ.

ಮತ್ತೆ, $y - 2x = \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \left[\frac{y^3 - x^2 + 2y - 1}{(y - x)(x^2 + xy + y^2)} \right]_{y=2x}$

$$= \underset{x\to\infty}{\text{ಪರಿಮಿತಿ}} \frac{8x^3 - x^2 + 4x - 1}{7x^3} = \tfrac{8}{7}.$$

$\therefore\ y - 2x = \frac{8}{7}$ ಎಂಬುದೊಂದು ಅಸಂಪಾತಿ.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಘಾತವು ನಾಲ್ಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಒಟ್ಟು ನಾಲ್ಕು ಅಸಂಪಾತಿಗಳಿರಬೇಕು. ಆದರೆ $y^2 + xy + x^2$ ಗೆ ಎರಡು ಭಾವನಾ ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವುದರಿಂದ, ಉಳಿದ ಎರಡು ಅಸಂಪಾತಿಗಳು ಭಾವನಾ (imaginary) ಅಸಂಪಾತಿಗಳು.

(2) ದತ್ತ ರೇಖೆಯು

$$\phi_n(x, y)+\phi_l(x, y)=0, \ l\leq n-2,$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $\phi_n(x, y)$ ನಲ್ಲಿ n ನೆಯ ಘಾತದ ಮತ್ತು n ಗಿಂತ ಕಡಮೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳಿರಬಹುದು, ಮತ್ತು $\phi_l(x, y)$ ನಲ್ಲಿ $(n-2)$ ನೆಯ ಘಾತದ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಮೆಯ ಘಾತದ ಪದಗಳಿರಬಹುದು, ಆಗ $\phi_n(x, y)$ ಗೆ $ax+by+c$ $(a\neq 0, b\neq 0)$ ಎಂಬ ರೂಪದ ಸರಳಾಪವರ್ತನಗಳಿದ್ದು, ಅವುಗಳಿಂದ ರೂಪಿತವಾದ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಎರಡೂ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಾಗಲಿ, ಐಕ್ಯವಾಗಿಯಾಗಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳೇ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು.

ಸಾಧನೆ; ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯಲ್ಲಿ $y=mx+c$ ಹಾಕಿದರೆ, § 14.3 ರ $q_n(m)$ ಮತ್ತು $g_{n-1}(m)$ ಎಂಬ ವ್ಯಕ್ತಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕೆ $\phi_l(x, y)$ ಎಂಬ ಭಾಗವು ಬೇಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, $l\leq n-2$. ಅಲ್ಲದೆ, ದತ್ತ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ $g_n(m)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು n ನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕೆ n ಅನಾವರ್ತ ನಿಜ ಮೂಲಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು $\phi_n(x, y)=0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\phi_n(x, y)=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು n ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಯು ಆ ಸರಳರೇಖೆಯೇ ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ n ಸರಳರೇಖೆಗಳೇ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು. ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತವು n ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದಕ್ಕೆ ಈ n ಅಸಂಪಾತಿಗಳಲ್ಲದೆ ಮತ್ತಾವ ಅಸಂಪಾತಿಗಳೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ

$$(x^2-y^2)(x+2y+3)+2x-3y+4=0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ; ಮತ್ತು ಈ

ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಅಸಂಪಾತಿಗಳು

$$(x^2-y^2)(x+2y+3)=0 \qquad \ldots \quad \text{(i)},$$

ಎಂದರೆ, $x-y=0$, $x+y=0$ ಮತ್ತು $x+2y+3=0$.

ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ (i) ನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ವ್ಯವಕಲನದಿಂದ, ಆ ಬಿಂದುಗಳು $2x-3y+4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ; ಎಂದರೆ, ಆ ಬಿಂದುಗಳು $2x-3y+4=0$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತವೆ.

(3) ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು

$$y=mx+c+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots$$

ಎಂಬ ರೂಪದ ಅನಂತ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತರಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ಈ ಶ್ರೇಣಿಯು x ನ ಎಲ್ಲ ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸಂಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದು (convergent), ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪದಶಃ ಅಂತರಿಸುವುದು (term-wise differentiation) ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $y=mx+c$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $\dfrac{dy}{dx}=m-\dfrac{a_1}{x^2}-\dfrac{2a_2}{x^3}-\cdots$

$\therefore$ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ (x_1, y_1) ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y-y_1=\left(m-\frac{a_1}{x_1^2}-\frac{2a_2}{x_1^3}-\cdots\right)(x-x_1),$$

ಎಂದರೆ,
$$y=\left(m-\frac{a_1}{x_1^{\,2}}-\frac{2a_2}{x_1^{\,3}}-\cdots\right)x$$
$$+y_1-mx_1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{2a_2}{x_1^{\,2}}+\cdots$$
$$=\left(m-\frac{a_1}{x_1^{\,2}}-\frac{2a_2}{x_1^{\,3}}-\cdots\right)x$$
$$+c+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_1^{\,2}}+\cdots$$
$$+\frac{a_1}{x_1}+\frac{2a_2}{x_1^{\,2}}+\cdots$$
$$=\left(m-\frac{a_1}{x_1^{\,2}}-\frac{2a_2}{x_1^{\,3}}-\cdots\right)x$$
$$+c+\frac{2a_1}{x_1}+\frac{3a_2}{x_1^{\,2}}+\cdots$$

ಈಗ, $x_1=\infty$ ಆದಂತೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಮಿತಿಯು $y=mx+c$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ $y=mx+c$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿ.

ಉದಾಹರಣೆ

$$(y-2x)^2(x-1)=x$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y-2x=\pm\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\pm\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots\right),\ (x>1).$$

$\therefore y - 2x = \pm 1$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಅಸಂಪಾತಿಗಳು

ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಘಾತದ್ದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯಿರಬೇಕು. y ನ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತವು y^2, ಮತ್ತು y^2 ನ ಸಹವರ್ತನವು $(x-1)$. $\therefore x-1=0$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಇನ್ನೊಂದು ಅಸಂಪಾತಿ.

14.5. ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಸ್ಥಾನ ನಿರ್ದೇಶ (position of a curve w.r.t. its asymptotes).

ದತ್ತ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯ ಯಾವ ಕಡೆಗೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಕ್ಕೆ, ಅಸಂಪಾತಿಯು $y = mx + c$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ x ನ ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಸಂಪಾತಿಗಳ y – ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಧನವೇ ಅಥವಾ ಋಣವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು; ಮತ್ತು ಅಸಂಪಾತಿಯು $x = k$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ y ನ ದೊಡ್ಡ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಅಸಂಪಾತಿಗಳ x – ನಿರ್ದೇಶಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಧನವೇ ಅಥವಾ ಋಣವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು ಒಂದೆರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $x^3 + y^3 = 3axy$ ಎಂಬ ಪತ್ರಲತೆಯು (folium) ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಯ ಮೇಲುಗಡೆಗೆ ಇದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

§ 14.3 ರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಈ ರೇಖೆಗೆ $x + y + a = 0$ ಎಂಬುದೊಂದೇ ನಿಜವಾದ (real) ಅಸಂಪಾತಿಯೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು

$$\left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು; ಏಕೆಂದರೆ $y=xt$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು ದತ್ತ ರೇಖೆಯನ್ನು ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ x ಗೆ $3at/(1+t^3)$ ಎಂಬ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡೋಣ. ತದನುಗುಣವಾಗಿ, ದತ್ತರೇಖೆಯ y-ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು y_2 ಎಂದೂ, ಅಸಂಪಾತಿಯ y-ನಿರ್ದೇಶಕವನ್ನು y_1 ಎಂದೂ ಕರೆಯೋಣ. ಆಗ

$$y_2=\frac{3at^2}{1+t^3}, \text{ ಮತ್ತು } y_1=-x_1-a=-\frac{3at}{1+t^3}-a,$$

$$\therefore \qquad y_2-y_1=a\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}.$$

ಈಗ, t^2-t+1 ನ ವಿವೇಚಕವು (discriminant) <0 ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಲ್ಲ t ಗಳಿಗೂ t^2-t+1 ನ ಚಿಹ್ನೆಯು t^2 ನ ಸಹವರ್ತನದ ಚಿಹ್ನೆಯೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ, ಎಲ್ಲ t ಗಳಿಗೂ, $t^2-t+1>0$. $\therefore\ y_2-y_1>0$. $\therefore$ ರೇಖೆಯು ಅಸಂಪಾತಿಯ ಮೇಲುಗಡೆಗೆ ಇದೆ (ಆಕೃತಿ 16-16).

2. $$y^2=x^2\frac{x+1}{x-1}, \quad (x>1),$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾವುವು? ಮತ್ತು ರೇಖೆಯು ಆ ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಯಾವ ಕಡೆಗೆ ಇದೆ?

§ 14.3 ರ ವಿಧಾನದಿಂದ, ದತ್ತರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು

$$y=x+1, \quad y=x-1 \text{ ಮತ್ತು } x=1.$$

ಈಗ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

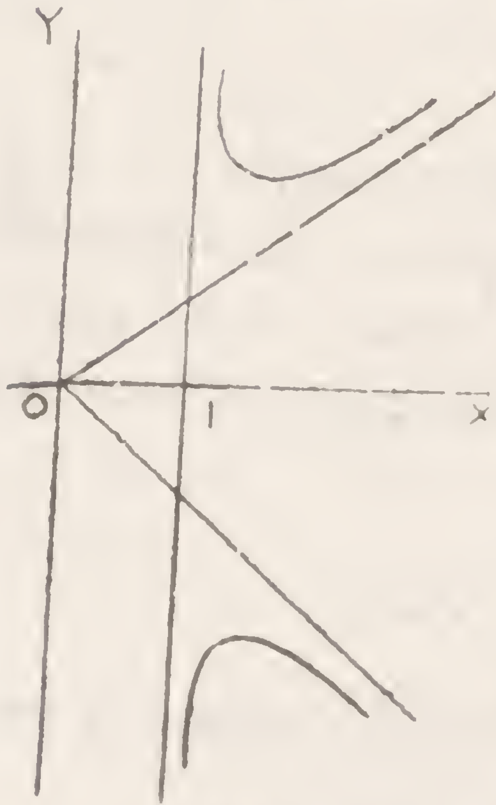
ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲು, ಬಲಗಡೆ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, $y = x + 1$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲೂ r ನ ಬೆಲೆ ಒಂದೇ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ,

$$y_2 = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \text{ ಮತ್ತು } y_1 = x + 1.$$

ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ,

$$y_2 - y_1 = [x - \sqrt{(x^2 - 1)}]\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$
$$> 0 (\because x > 1)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ (first quadrant) ರೇಖೆಯು $y = x + 1$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯ ಮೇಲುಗಡೆಗಿದೆ. ರೇಖೆಯು x–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ (symmetrical), ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು $y = -x - 1$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯ ಕೆಳಗಡೆಗಿದೆ. $x = 1$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ರೇಖೆಯು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆಯೆಂಬುದು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ; ವಸ್ತುಶಃ, $0 < x < 1$ ಆದಾಗ, y ನ ಬೆಲೆಗಳು ನಿಜವಾದುವಲ್ಲ. (ಆಕೃತಿ 14–3).



ಆಕೃತಿ 14–3

14.6. ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು (asymptotes in polar coordinates).

$$\frac{1}{r} = f(\theta)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ, $\theta \to \alpha$ ಆದಂತೆ $f(\theta) \to 0$ ಮತ್ತು

$$f'(\theta) \to f'(\alpha) \neq 0 \text{ ಆದರೆ, ಆಗ}$$

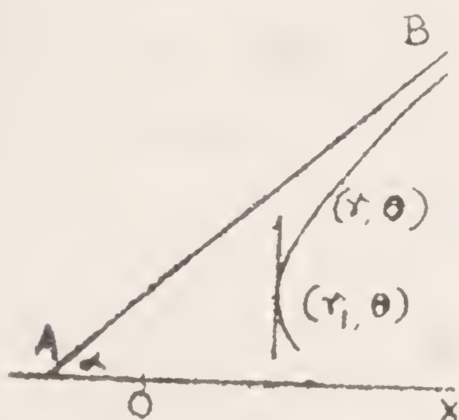
$$r \text{ ಸೈನ್}(\theta - \alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

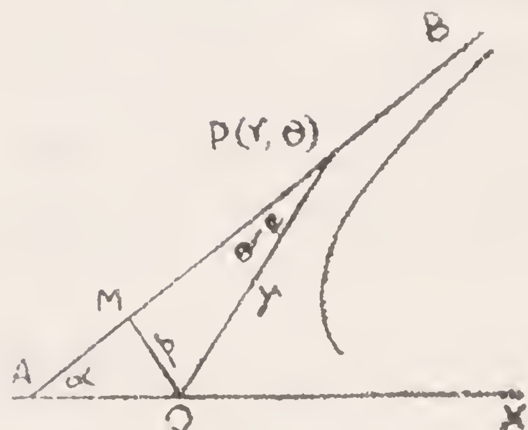
ಸಾಧನೆ: ದತ್ತರೇಖೆಗೆ (r_1, θ_1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \text{ ಕಾಸ್}(\theta - \theta_1) - \frac{1}{r_1^2} \frac{dr_1}{d\theta_1} \text{ ಸೈನ್}(\theta - \theta_1)$$

(§ 8.24).



ಆಕೃತಿ 14-4



ಆಕೃತಿ 14-5

ಇಲ್ಲಿ (r, θ) ಎಂಬುದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಚಲಿತ (current) ಬಿಂದು (ಆಕೃತಿ 14-4). ಈಗ (r_1, θ_1) ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (point of contact),

$$\frac{1}{r_1} = f(\theta_1) \text{ ಮತ್ತು } -\frac{1}{r_1^2} \frac{dr_1}{d\theta_1} = f'(\theta_1).$$

ಆದ್ದರಿಂದ (r_1, θ_1) ನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು

$$\frac{1}{r} = f(\theta_1) \text{ ಕಾಸ್}(\theta - \theta_1) + f'(\theta_1) \text{ ಸೈನ್}(\theta - \theta_1)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $\theta_1 \to \alpha$ ಆದರೆ, ಆಗ $f(\theta_1) \to 0$ ಮತ್ತು $f'(\theta_1) \to f'(\alpha) \neq 0$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಮಿತಿ ರೂಪವು

$$\frac{1}{r} = f'(\alpha) \text{ ಸೈನ್}(\theta - \alpha),$$

ಎಂದರೆ, $$r \text{ ಸೈನ್}(\theta - \alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \dots \quad \text{(i)}$$

ಆಗುತ್ತದೆ (ಆಕೃತಿ 14–5). $\theta_1 \to \alpha$ ಆದಾಗ $f(\theta_1) \to 0$ ಆಗುವುದರಿಂದ, $r_1 \to \infty$. ಅಲ್ಲದೆ O ಎಂಬ ಧ್ರುವದಿಂದ ಸರಳ ರೇಖೆ (i) ಕ್ಕೆ, ಎಂದರೆ AB ಗೆ OM$(=p)$ ಎಂಬ ಲಂಬವನ್ನೆಳೆದರೆ, ಆಗ rಸೈನ್$(\theta - \alpha) = p$. ಆದ್ದರಿಂದ $p = 1/f'(\alpha)$. ಈಗ $f'(\alpha) \neq 0$ ಎಂದು ದತ್ತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, p ಯು ಒಂದು ಪರ್ಯಾಪ್ತವಾದ (finite) ಸ್ಥಿರ. ಹೀಗೆ (i) ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು O ಎಂಬ ಧ್ರುವದಿಂದ ಪರ್ಯಾಪ್ತವಾದ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿರೂಪಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ, (i) ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿ.

ಉದಾಹರಣೆ

r ಸೈನ್$\theta = a(1 - 4$ ಸೈನ್$^2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$, ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

$$\frac{1}{r} = \frac{\text{ಸೈನ್}\,\theta}{a(1 - 4 \text{ ಸೈನ್}^2\theta)} = f(\theta)$$

$\therefore r \to \infty$ ಆಗುವುದು $\theta \to 0$ ಆದಾಗ. ಆಗ, $f(\theta) \to 0$ ಮತ್ತು $f'(\theta) \to 1/a$. $\therefore$ ಅಸಂಪಾತಿಯು r ಸೈನ್$\theta = a$.

14.7 ವರ್ತುಳೀಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು (circular asymptotes).

$$r = f(\theta)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $\theta \to \infty$ ಆದಂತೆ $f(\theta) \to a$ ಆದರೆ, ಆಗ ದತ್ತರೇಖೆಯು

$$r = a$$

ಎಂಬ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಪರಿಮಿತಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ ಅಸಂಪಾತೀಯ ವರ್ತುಳ (asymptotic circle) ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$$r = \frac{3\theta^2 - 2\theta + 1}{2\theta^2 + 3\theta + 2}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತೀಯ ವರ್ತುಳವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\theta \to \infty$ ಆದಂತೆ, $r \to 3/2$. $\therefore$ ಅಸಂಪಾತೀಯ ವರ್ತುಳವು $r = 3/2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 14

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

i) $y(x^2 - y^2) + (y-1)^2 + 3x(y+1) = 0$;

ii) $y^3 - xy(2x + y - 1) - 6(y+1)^2 + (2x-1)^2 = 0$;

iii) $y^3 - y^2(2x-1) + xy(x-1) + 2 = 0$;

iv) $y(x+y)^2 = y - 1$;

v) $y(x-y)^2 = x + y$;

vi) $y^2(a^2 - x^2) = x^4$;

vii) $(x-a)(y-b) = c^2$;

viii) $y^2(2a - x) = x^3$;

ix) $x^3 + y^3 = 3axy$;

x) $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$;

xi) $x^2y^2(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2$;

xii) $(y-x)^2(y-2x)(y-3x)-2(y^3-x^3)$
$-2(y+x)(y-2x)=0.$

2. $(x^2-y^2)^2-2(x^2+y^2)+1=0$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾವುವು? ಅವು ಒಂದು ಚದುರವನ್ನು (square) ನಿರ್ಮಿಸುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಆ ಚದುರದ ಸಲೆ ಎಷ್ಟು?

3. x^3+ ಲಾಗ್ $y=0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $x-$ಅಕ್ಷವು ಎರಡು ಕೊನೆಗಳಲ್ಲೂ ಅಸಂಪಾತಿಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $y=$ ಟ್ಯಾನ್$(\pi x/2)$ ಮತ್ತು $y=$ ಕಾಟ್(πx) ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳ ಅಸಂಪಾತಿಗಳು ಒಂದೇ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $(x+2y-1)(x^2-y^2)+3x-4y+1=0$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾವುವು? ಈ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಆ ಸರಳರೇಖೆ ಯಾವುದು?

6. $(x^2-y^2)(x^2-4y^2)+4x^2+9y^2-36=0$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾವುವು? ಈ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಅವಲುಪ್ತಿಯ (ellipse) ಮೇಲಿರುತ್ತವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಆ ಅವಲುಪ್ತಿ ಯಾವುದು?

7. $y^4-5x^2y^2+6x^4+xy-4=0$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸಮಾತಿಕ್ಷೇಪದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಮತ್ತು ಸಮಾತಿಕ್ಷೇಪದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 - 2xy^2 + 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$
ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ವರ್ತುಳದ ಮೇಲೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ ಅಸಂಪಾತಿಗಳ ಮತ್ತು ವರ್ತುಳದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

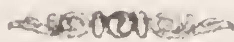
9. $y =$ ಟ್ಯಾನ್‌ಎಚ್‌x ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾವುವು? ಈ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಕಡೆಗಳಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ?

10. $$y^2(x^2 - 1) = x^3(x^2 - 4)$$
ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳಾವುವು? ಈ ರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ಕಡೆಗಳಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ?

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:
(i) $r = a/\theta$; (ii) r ಕಾಸ್$\theta = a$ ಸೈನ್$^2\theta$.

12. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ಅಸಂಪಾತೀಯ ವರ್ತುಳಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $r(\theta^2 + 1) = (\theta + 1)^2$;
(ii) $r = a$ಕಾಟ್‌ಎಚ್‌θ.



ಅಧ್ಯಾಯ XV

ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುಗಳು

(double points)

15.1. ನಿರೂಪಣೆ (definition).

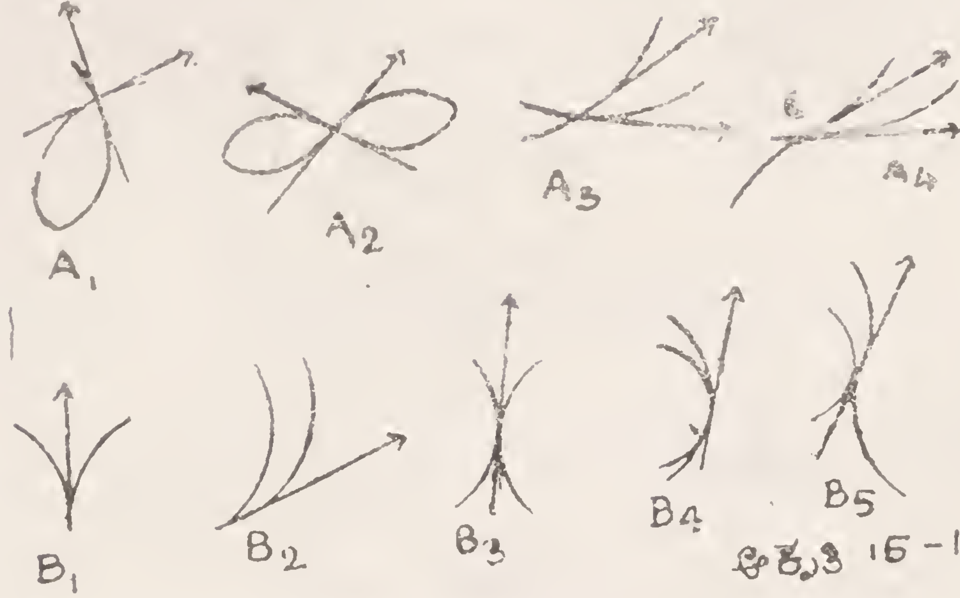
ಒಂದು ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ಆ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಒಂದೊಂದು ಶಾಖೆಯಂತೆ (branch) ರೇಖೆಯ ಎರಡು ಶಾಖೆಗಳು ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ; ಎಂದರೆ, ಅಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಕವಲಾಗಿ ಒಡೆಯುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆಯೇ, ತ್ರಿಗುಣ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (triple point) ರೇಖೆಗೆ ಮೂರು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿದ್ದು, ರೇಖೆಯು ಮೂರು ಶಾಖೆಗಳಾಗಿ ಒಡೆಯುತ್ತದೆ. n ನೆಯ ಅಧಿಷ್ಠಾನದ ಬಹುಗುಣ ಬಿಂದುವಿನ (multiple point of the n^{th} order) ನಿರೂಪಣೆಯೂ ಇದೇ ರೀತಿ. ಏಕಮೂಲ್ಯವಾದ (single valued) ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳಿಗೆ ಗುಣಬಿಂದುಗಳಿರುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ವಗೋಚರವಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

15.2. ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದುಗಳ ವರ್ಗೀಕರಣ (classification of double points).

ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿರಬಹುದು (separate), ಅಥವಾ ಐಕ್ಯವಾಗಿರಬಹುದು (coincident), ಅಥವಾ ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾಗಿರಬಹುದು (imaginary). ತದನುಗುಣವಾಗಿ, ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವು ಛೇದಕಶಾಖಿ ಅಥವಾ ಕಂಠಬಿಂದು,

ಸ್ಪರ್ಶಕಶಾಖೆ ಅಥವಾ ಕುಶಬಿಂದು (cusp), ಅನುಬದ್ಧಬಿಂದು (conjugate point) ಅಥವಾ ಏಕಾಂಗಿಬಿಂದು (isolated point)



ಆಕೃತಿ 15-1

ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆಕೃತಿ 15–1 ರಲ್ಲಿ A_1, A_2, A_3, A_4 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಕಂಠಬಿಂದುಗಳು, B_1, B_2, . . ., B_5 ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಕುಶಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಅನುಬದ್ಧ ಬಿಂದು.

15.3. ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ವಿಶ್ಲೇಷಕ ನಿರ್ಧಾರಕಗಳು (analytical criteria for double points).

$$f(x, y) = 0$$

ಎಂಬ ಒಂದು ರೇಖೆಯಮೇಲೆ $P(x_1, y_1)$ ಎಂಬುದೊಂದು ಬಿಂದುವೆಂದೂ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾದ ಎರಡನೆಯ ಹಂತದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳಿವೆಯೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ.

ಈ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ, ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ $Q(x_1 + h, y_1 + k)$ ಎಂಬುದು ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ (ಆಕೃತಿ 15–2), ಆಗ

$$\text{ಪರಿಮಿತಿ}_{h \to 0} \frac{k}{h} = m \qquad \ldots\ \text{(i)},$$

ಎಂಬ ಪರಿಮಿತಿಯು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವಷ್ಟೆ (slope). ಈಗ

ಆಕೃತಿ 15-2

$$f(x_1+h,\ y_1+k)=f(x_1,\ y_1)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_1,\ y_1)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_1+\theta h,\ \ y_1+\theta k),$$

$$0<\theta<1.$$

ಆದರೆ, $f(x_1,\ y_1)=0$ ಮತ್ತು $f(x_1+h,\ y_1+k)=0.$

$$\therefore \qquad \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_1,\ y_1)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_1+\theta h,\ y_1+\theta k)$$

$$=0,\ \ 0<\theta<1, \qquad \ldots\ \text{(ii)}$$

ಇದರಲ್ಲಿ $f_x(x_1,\ y_1)$ ಮತ್ತು $f_y(x_1,\ y_1)$ ಎಂಬ ಪಾಕ್ಷಿಕ ದತ್ತಗಳೆರಡೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ, ಸಮೀಕರಣ (ii) ನ್ನು h ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $h\to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, (i) ರಿಂದ,

$$f_x(x_1,\ y_1)+mf_y(x_1,\ y_1)=0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು m ಗೆ

$$m = -\frac{f_x(x_1, y_1)}{f_y(x_1, y_1)}$$

ಎಂಬ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಕೊಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$y - y_1 = -\frac{f_x(x_1, y_1)}{f_y(x_1, y_1)}(x - x_1), f_y(x_1, y_1) \neq 0;$$

ಎಂದರೆ, $(x - x_1)f_x(x_1, y_1) + (y - y_1)f_y(x_1, y_1) = 0.$

m ಅನಂತವಾದಾಗ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $y = y_1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, P ಬಿಂದುವು ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ದತ್ತರೇಖೆಗೆ ಅಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವು ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವಾದರೆ,

$f(x_1, y_1) = 0$ $f_x(x_1, y_1) = 0$ ಮತ್ತು $f_y(x_1, y_1) = 0$ .... (A)

ಆಗಲೇಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ದತ್ತರೇಖೆಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, (A) ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಗಳ ಜೊತೆಗೆ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ಎಂಬ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಎರಡನೆಯ ಹಂತದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ, ಸಮೀಕರಣ (ii)

$$\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k) = 0,$$

$$0 < \theta < 1,$$

ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು h^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $h \to 0$ ಆದಂತೆ ಪರಿಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ, ಎರಡನೆಯ ಹಂತದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯಿಂದಲೂ, (i) ರಿಂದಲೂ,

$$f_{xx}(x_1, y_1) + 2mf_{xy}(x_1, y_1) + m^2 f_{yy}(x_1, y_1) = 0 \quad .... \text{(iii)}$$

ಈ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವು (quadratic equation) m ಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದರಿಂದ, ದತ್ತರೇಖೆಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವು ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ,

$$[f_{xy}(x_1, y_1)]^2 \gtrless f_{xx}(x_1, y_1)\cdot f_{yy}(x_1, y_1) \quad \cdots \quad (B)$$

ಆದಂತೆ, m ನ ಬೆಲೆಗಳು, ನಿಜ ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ, ಅಥವಾ ನಿಜ ಮತ್ತು ಐಕ್ಯ, ಅಥವಾ ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತವೆ. ತದನುಗುಣವಾಗಿ, P ಬಿಂದುವು ಕಂಠಬಿಂದು ಅಥವಾ ಕುಶಬಿಂದು ಅಥವಾ ಅನುಬದ್ಧಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (iii) ರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಬೆಲೆಗಳು m_1, m_2 ಆದರೆ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಯುಗಳದ ಸಮೀಕರಣವು

$$[(y-y_1)-m_1(x-x_1)]\,[(y-y_1)-m_2(x-x_1)]=0$$

ಎಂದರೆ, $$(y-y_1)^2-(m_1+m_2)(y-y_1)(x-x_1)+m_1m_2(x-x_1)^2=0.$$

ಆದರೆ, $$m_1+m_2=-2\frac{f_{xy}(x_1, y_1)}{f_{yy}(x_1, y_1)},$$

ಮತ್ತು $$m_1m_2=\frac{f_{xx}(x_1, y_1)}{f_{yy}(x_1, y_1)}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಯುಗಳದ ಸಮೀಕರಣವು

$$(x-x_1)^2 f_{xx}(x_1, y_1)+2(x-x_1)(y-y_1)f_{xy}(x_1, y_1)+(y-y_1)^2 f_{yy}(x_1, y_1)=0 \quad \cdots \quad (C)$$

ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ:

$f_x=0$, $f_y=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿಘಟಿಸುವುದರಿಂದ (solve) ದೊರೆಯುವ x, y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳ ಪೈಕಿ $f(x, y)=0$ ಎಂಬ

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವಂಥ ಬೆಲೆಗಳು ದತ್ತರೇಖೆಯ ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಮೇಲಿನ (B) ಎಂಬ ಅಸಮತೆಯ (inequality) ಪ್ರಕಾರ ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದುಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸ ಬಹುದು; ಮತ್ತು ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣವು ಮೇಲಿನ (C).

ಟಿಪ್ಪಣಿ: (1) § 10.3 ರಲ್ಲಿ ದತ್ತವಾಗಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಗಳಲ್ಲಿ $f_x=0$, $f_y=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು $z=f(x, y)$ ಎಂಬ ಮುಖಸ್ಥಲದ (surface) ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮುಖ ಸ್ಥಲವು ತನ್ನ ಸ್ಪರ್ಶತಲವನ್ನು (tangent plane) ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು xy – ತಲದಮೇಲೆ (xy – plane) ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ (project), $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಶಾಖೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(2) ಒಂದು ವೇಳೆ, P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, $f(x, y)$ ಮತ್ತು ಅದರ 1 ಮತ್ತು 2 ನೆಯ ಹಂತಗಳ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಶೂನ್ಯವಾಗಿ, 3 ನೆಯ ಹಂತದ ಪಾಕ್ಷಿಕ ಜನ್ಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಶೂನ್ಯವಾಗವೆಯೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿಯೂ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಒಂದು ತ್ರಿಗುಣ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಚಾರವನ್ನು ಮೇಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.

$y=f(x)$ ಎಂಬ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ P ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸಾಮೀಪ್ಯದಲ್ಲಿ $f'(x)$ ಎಂಬ ಜನ್ಯವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಬಿಂದುವು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಒಂದು **ಏಕಪ್ರಕಾರ ಬಿಂದು** (uniform point, regular point) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಏಕಪ್ರಕಾರವಲ್ಲದ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ **ವಿಜಾತಿ ಬಿಂದುಗಳು** (singular points) ಎಂದು ಹೆಸರು. ವಿಜಾತಿ ಬಿಂದುಗಳು ಮೇಲಿನ (A)

ಎಂಬ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ. ಗುಣಬಿಂದುಗಳು (multiple points) ವಿಜಾತಿ ಬಿಂದುಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$x^3+y^2-7x^2-2y+16x-11=0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದುವಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ; ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು $f(x, y)=0$ ಆದರೆ, ಆಗ

$$f_x=3x^2-14x+16;\quad f_y=2(y-1).$$

ಈಗ $f_x=0$, $f_y=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ, $(2, 1)$, $(\frac{8}{3}; 1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈ ಪೈಕಿ $(2, 1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಮಾತ್ರ ದತ್ತರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ. ∴ ಈಗ ಈ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$f_{xx}=6x-14,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=2.$$

$$\therefore\quad f_{xx}(2, 1)=-2,\quad f_{xy}(2, 1)=0,\quad f_{yy}(2, 1)=2.$$

$(2, 1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ 2 ನೆಯ ಹಂತದ ಪಾರ್ಶ್ವಿಕ ಜನ್ಯಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಟ್ಟಿಗೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲ. ಈ ಬಿಂದುವು ದತ್ತರೇಖೆಯ ಒಂದು ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದು. ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ,

$(f_{xy})^2=0$ ಮತ್ತು $f_{xx}\cdot f_{yy}=-4$. ಆದ್ದರಿಂದ

$$(f_{xy})^2>f_{xx}\cdot f_{yy}.$$

∴ $(2, 1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಕಂಠಬಿಂದು (node). ಸಮೀಕರಣ (C), § 15.3 ರಿಂದ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $y-1=\pm(x-2)$.

2. $$r^2=a^2 \text{ ಕಾಸ್ } 2\theta$$

ಎಂಬ ದ್ವೀಪದ್ವಯಕ್ಕೆ (lemniscate) ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕಂಠಬಿಂದು

ವೆಂದು (node) ತೋರಿಸಿ; ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $r=0$. $\therefore$ ಕಾಸ್ $2\theta=0$.

$\therefore \theta=\pm\pi/4$. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ಎರಡು ಶಾಖೆಗಳಿವೆ. ಅಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $\theta=\pm\pi/4$ (§ 8.24). ಈ ಫಲಗಳನ್ನು ದತ್ತ ರೇಖೆಯ ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಸಮೀಕರಣದಿಂದಲೂ [ಎಂದರೆ, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದಲೂ] ಪಡೆಯಬಹುದು. (ಆಕೃತಿ 8–8).

3. $$y^2(2a-x)=x^3$$

ಎಂಬ ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆಗೆ (cissoid) ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕುಶ ಬಿಂದು (cusp) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$f(x, y)=y^2(2a-x)-x^3 \text{ ಆದರೆ,}$$

$$f_x=-(y^2+3x^2) \text{ ಮತ್ತು } f_y=2y(2a-x)$$

$\therefore f_x=0, f_y=0$ ಮತ್ತು $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ ಪಾಲಿಸುವ ಬಿಂದುವು $(0, \theta)$. ಮತ್ತೆ

$$f_{xy}=-6x, f_{yy}=-2y. f_{yy}=2(2a-x).$$

$\therefore$ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$(f_{xy})^2=f_{xx}\cdot f_{yy}$$

$\therefore$ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕುಶಬಿಂದು. ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $y=0$. (ಆಕೃತಿ 16-14).

4. $$x^2+y^2=x^3$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಒಂದು ಅನುಬದ್ಧಬಿಂದು (conjugate point) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3$ ಆದರೆ,

$$f_x = 2x - 3x^2, \quad f_y = 2y.$$

$f_x = 0 = f_y = f(x, y)$ ಆಗುವುದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ.

ಈಗ, $f_{xx} = 2 - 6x$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2$. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ

$$(f_{xy})^2 < f_{xx} \cdot f_{yy}.$$

∴ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಅನುಬದ್ಧ ಬಿಂದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 15

1. $y^2 = x^2 - x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕಂಠಬಿಂದು (node) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳ ಮತ್ತು ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^2}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕುಶಬಿಂದು (cusp) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. $x^2 + y^2 = x^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಅನುಬದ್ಧ ಬಿಂದು (conjugate point) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $x^3 + y^3 = 3axy$ ಎಂಬ ಪತ್ರಲತೆಗೆ (folium) ಮೂಲ ಬಿಂದುವು ಕಂಠಬಿಂದು (node) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ, ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x^3 + y^3 + 3axy = a^3$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $(-a, -a)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಏಕಾಂಗಿಬಿಂದು (isolated point) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $$y^2 = x^2 \cdot \frac{a+x}{b-x},\ b>0,$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಬಿಂದುವು $a>0$ ಆದಾಗ ಕಂಠಬಿಂದುವೆಂದೂ $a=0$ ಆದಾಗ ಕುಶಬಿಂದುವೆಂದೂ ತೋರಿಸಿ.

7. $$x^2y^2 = (a+y)^2(b^2-y^2)$$

ಎಂಬ ಪಾಂಚಜನ್ಯಕ್ಕೆ $(0, -a)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $b \gtreqless a$ ಆದಂತೆ ಕಂಠಬಿಂದು, ಕುಶಬಿಂದು, ಅಥವಾ ಅನುಬದ್ಧಬಿಂದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $$y^2 = (x-a)^2(x-b)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ $(a, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $a \gtreqless b$ ಆದಂತೆ, ಕಂಠಬಿಂದು, ಕುಶಬಿಂದು ಅಥವಾ ಅನುಬದ್ಧಬಿಂದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $$x^4 - 4x^3 - 2y^3 + 4x^2 + 3y^2 - 1 = 0$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಮೂರು ಕಂಠಬಿಂದುಗಳಿವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳ ದ್ವಿಗುಣಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $(y-2)^2 = x(x-1)^2$;

ii) $y^2 = 4xe^{y-x-1}$;

iii) $x^2(x-y) + y^2 = 0$;

iv) $x^3 + y^3 - 12x - 27y + 70 = 0$.

11. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ತ್ರಿಗುಣಬಿಂದುವೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

i) $x^4 - 2x^2y + 3y^3 = 0$;

ii) $(x^2+y^2)^2 = y(3x^2-y^2)$.

12. ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಒಂದು ಗುಣ ಬಿಂದು (multiple point) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ :

i) r^2 ಕಾಸ್$^2\theta = a^2$ ಕಾಸ್ 2θ ;

ii) $r = a(1 +$ ಕಾಸ್ $\theta)$;

iii) $r = a$ ಸೈನ್ $(2n - 1)\theta$;

iv) $r = a$ ಸೈನ್ $2n\theta$.



ಅಧ್ಯಾಯ XVI

ರೇಖಾನುಸರಣ

(curve-tracing)

16.1. ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳ ರೇಖಾರೂಪಣೆ (representation of functions by curves):

ಒಂದು ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ರೇಖೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕ್ರಮಕ್ಕೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಅನುಸರಣವೆಂದು ಹೆಸರು. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗುಣವಿಶೇಷಗಳನ್ನು (properties)—ಎಂದರೆ, ಆರೋಹಿತ್ವ ಮತ್ತು ಅವರೋಹಿತ್ವ, ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳು, ಪ್ರವಣತೆ, ಅಸಂಪಾತಿಗಳು, ಪೀನತೆ ಮತ್ತು ನಿಮ್ನತೆ ಪ್ರತಿವಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಬಿಂದುಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು —ಅವಲಂಬಿಸಿ, ಆಯಾ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ, ರೇಖಾನುಸರಣದ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲವು ರೇಖೆಗಳ ರಚನೆಯನ್ನು ಜಾಮಿತೀಯವಾದ (geometrical) ಅಥವಾ ಯಾಂತ್ರಿಕವಾದ (mechanical) ಸೂತ್ರರೂಪಕ್ಕೆ ಇಳಿಸುವುದೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. [§ 16.3 ರಲ್ಲಿ (4), (5), (7), (10), (15)]

16.2. ರೇಖಾನುಸರಣದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕ್ರಮ (general procedure for curve-tracing).

ರೇಖಾನುಸರಣದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

(1) ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ :

(i) ಸಮಸಂಗತಿ (symmetry) : $f(x, y)=0$ ಎಂಬ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y ನ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ,

ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ; x ನ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ವಿನಿಮಯದಿಂದ (interchange) ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಬದಲಾಗದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು $y = x$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) ರೇಖೆಯು x – ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು: $f(x, y) = 0$ ಎಂಬ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y = 0$ ಹಾಕಿದರೆ, ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ; $x = 0$ ಹಾಕಿದರೆ, y – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(iii) x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ y ನ ಬೆಲೆಗಳು ನಿಜವಾದುವು (real)? ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾದುವು (imaginary)?

(iv) ರೇಖೆಯು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೆ? ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿಗಳಿದ್ದರೆ, ಅವು ಎಲ್ಲಿವೆ? $x \to \pm \infty$ ಆದಾಗ y ನ ಪರಿಮಿತಿಯೇನು? ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪ್ರಮುಖವಾಗಿ ಕಾಣಬರುವ ಇತರ ಬಿಂದುಗಳಾವುವು?

(v) x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ y ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ, ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದೆ? ಎಂದರೆ, x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $dy/dx > 0$ ಅಥವಾ < 0 ಆಗುತ್ತದೆ?

(vi) x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು x – ಅಥವಾ y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ?—ಎಂದರೆ, x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ dy/dx ಶೂನ್ಯ ಅಥವಾ ಅನಂತವಾಗುತ್ತದೆ?

(vii) ಪರಾಕಾಷ್ಠ (ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ) ಬಿಂದುಗಳವೆಯೆ?

(viii) x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ರೇಖೆಯು ಊರ್ಧ್ವ ಅಥವಾ ಅಧೋ ನಿಮ್ನವಾಗಿದೆ? ಎಂದರೆ, x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $d^2y/dx^2 > 0$ ಅಥವಾ < 0 ಆಗಿದೆ? ಪ್ರತಿಫಲನ ಬಿಂದುಗಳವೆಯೆ?

(ix) ಅಸಂಪಾತಿಗಳಿವೆಯೆ ?

(x) ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯು ಬಹುಮೂಲ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆಯಾದಲ್ಲಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಗುಣಬಿಂದುಗಳಿವೆಯೆ ?

(xi) ದತ್ತ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ಪರಮಾನಿಕ (parametric) ಅಥವಾ ಇತರ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಉಚಿತವೆ? ಅಂಥ ಪರಿವರ್ತನೆಯಿಂದ ಹೊರಬೀಳುವ ಹೊಸ ಸಂಗತಿಗಳಾವುವು ?

(xii) ರೇಖೆಯ ರಚನೆಯು ಜಾಮಿತೀಯ ಅಥವಾ ಯಾಂತ್ರಿಕ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆಯೆ ?

(xiii) ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಮಾನವಾವುದು (scale) ?

(2) ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ :

(i) ಸಮಸಂಗತಿ : $f(r, \theta)=0$ ಎಂಬ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ r ನ ಘಾತಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ, θ ಗೆ $(-\theta)$ ಹಾಕಿದಾಗ ಸಮೀಕರಣವು ಬದಲಾಗದಿದ್ದರೆ, ರೇಖೆಯು ಆದಿರೇಖೆಗೆ (initial line) ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. λ ದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $r=\psi(\alpha+\lambda)=\psi(\alpha-\lambda)$ ಆದರೆ, ರೇಖೆಯು $\theta=\alpha$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(ii) θ ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ r ನ ಬೆಲೆಗಳು ನಿಜ ಅಥವಾ ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ ?

(iii) θ ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ r ಶೂನ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ ? θ ದ ಕೆಲವು ಪ್ರಮುಖವಾದ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ r ನಬೆಲೆಗಳಾವುವು ?

(iv) r ನ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯಗಳಾವುವು?

(v) θ ಮತ್ತು ϕ ಕೋನಗಳ ಸಂಬಂಧವೇನು ?

(vi) ರೇಖೆಯ ಯಾವ ಭಾಗಗಳು ಧ್ರುವಕ್ಕೆ ನಿಮ್ನ ಅಥವಾ ಪೀನವಾಗಿವೆ? ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳಿವೆಯೆ?

(vii) ಅಸಂಪಾತಿಗಳಿವೆಯೆ?

(viii) ಗುಣಬಿಂದುಗಳಿವೆಯೆ?

ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ರೇಖೆಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಆವಶ್ಯಕತೆಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ರೇಖೆಗಳ ಆಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ವೈವಿಧ್ಯತೆಗೆ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಎಡೆಯಿದೆ. ಉದಾಹರಣಾರ್ಥವಾಗಿ ಈಗ ಕೆಲವು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1. $$y^2 = x^2(1-x)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(i) ದತ್ತಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y = \pm x\sqrt{(1-x)}$$

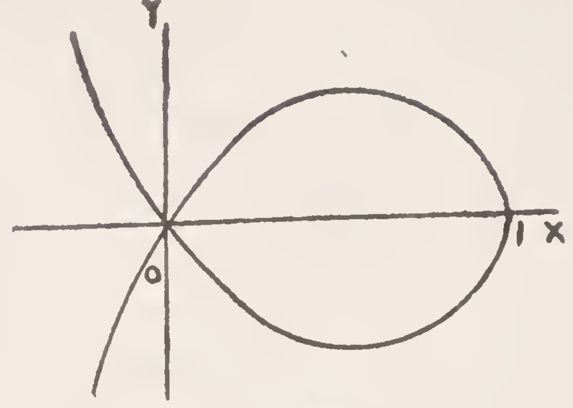
ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ.

(ii) $y=0$ ಆದಾಗ, $x=0, 1$. $\therefore$ ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, 0)$, $(1, 0)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) $x>1$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತವೆ. $\therefore$ $x>1$ ಆದಾಗ ರೇಖೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(iv) $x \to -\infty$ ಆದಂತೆ, $y \to \pm\infty$.

(v) $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{2-3x}{2\sqrt{(1-x)}}$.



ಆಕೃತಿ 16-1

(vi) ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕಂಠ ಬಿಂದು. ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $y = \pm x$.

(vii) $x = 1$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ.

(viii) ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$;

ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.

ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಸುಷಿರವನ್ನು (loop) ಒಳಗೊಂಡು, ಆಕೃತಿ 16-1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇದೆ.

2. $$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(i) ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲುಗಡೆಯ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನೆಳೆದು ಅದನ್ನು

$x-$ ಅಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸಿದರೆ (reflect) ಇದೇ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(ii) $y=0$ ಆದಾಗ $x=0,\ -a$. $\therefore$ ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, 0)$, $(-a, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) $-a \leq x < a$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ y ನ ಬೆಲೆಗಳು ನಿಜವಾದುವು. $x > a$ ಮತ್ತು $x < -a$ ಎಂಬ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾದುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯು $-a \leq x < a$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ.

(iv) $x \to a$ ಆದಾಗ $y \to \infty$. $x=a$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ಅಸಂಪಾತಿ. ಈ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ರೇಖೆಯು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೆರಡು ಅಸಂಪಾತಿಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾದುವು.

(v) $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^2 + ax - x^2}{(a-x)^{3/2}(a+x)^{1/2}}.$$

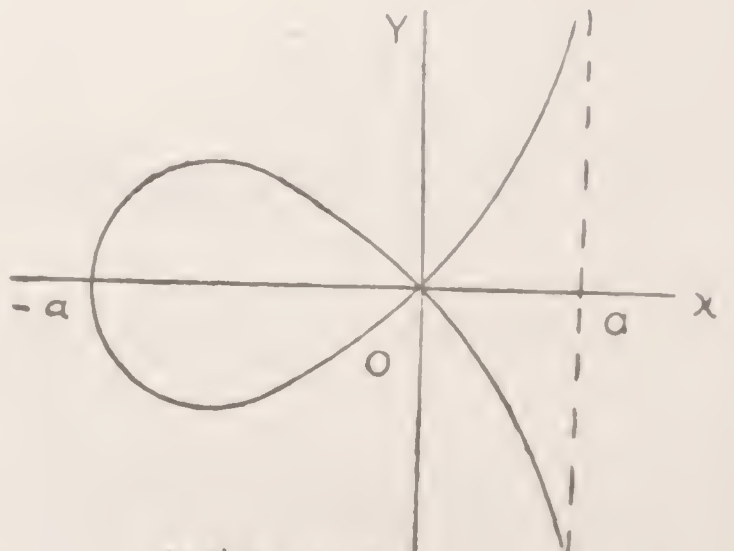
(vi) $x = \pm a$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು ಅನಂತವಾಗುತ್ತದೆ.

(vii) ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕಂಠಬಿಂದು. ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $y = \pm x$.

(viii) ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳ $x-$ ನಿರ್ದೇಶಕವು

$$\left[-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\right].$$

ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16–2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 16-2

3. $$y = \frac{x}{1+x^2}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(i) $x >$ ಅಥವಾ $=$ ಅಥವಾ < 0 ಆದಂತೆ, $y >$ ಅಥವಾ $=$ ಅಥವಾ < 0 ಆಗುವುದರಿಂದ, ರೇಖೆಯು 1 ಮತ್ತು 3 ನೆಯ ಚಾಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ (quadrants) ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ.

(ii) $x \to \pm \infty$ ಆದಂತೆ $y \to 0$. $x -$ ಅಕ್ಷವು ಎರಡು ಕೊನೆಗಳಲ್ಲೂ ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗಿದೆ. ರೇಖೆಯು ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು $x \to \infty$ ಆದಾಗ ಮೇಲುಗಡೆಯಿಂದಲೂ $x \to -\infty$ ಆದಾಗ ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದಲೂ ಸಮಿಾಪಿಸುತ್ತದೆ.

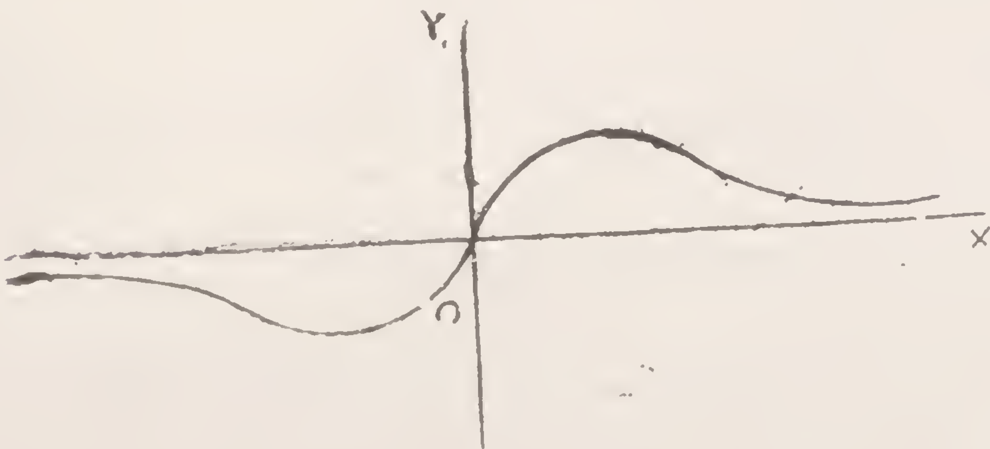
(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$.

(iv) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $y = x$.

(v) ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು $(1, \frac{1}{2})$, ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು $(-1, -\frac{1}{2})$.

(vi) ಪ್ರತಿವಲನಬಿಂದುಗಳು

$$(0, 0), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ ಮತ್ತು } \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$



ಆಕೃತಿ 16

ರೇಖೆಯನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಆಕೃತಿ 16–3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

4. $$x^2y^2 = x^2 - y^2$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(i) x ಮತ್ತು y ಗಳ ಘಾತಗಳು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ರೇಖೆಯು $x-$ ಮತ್ತು $y-$ ಅಕ್ಷಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. ದತ್ತಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y = \pm \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}, \text{ ಅಥವಾ } x = \pm \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

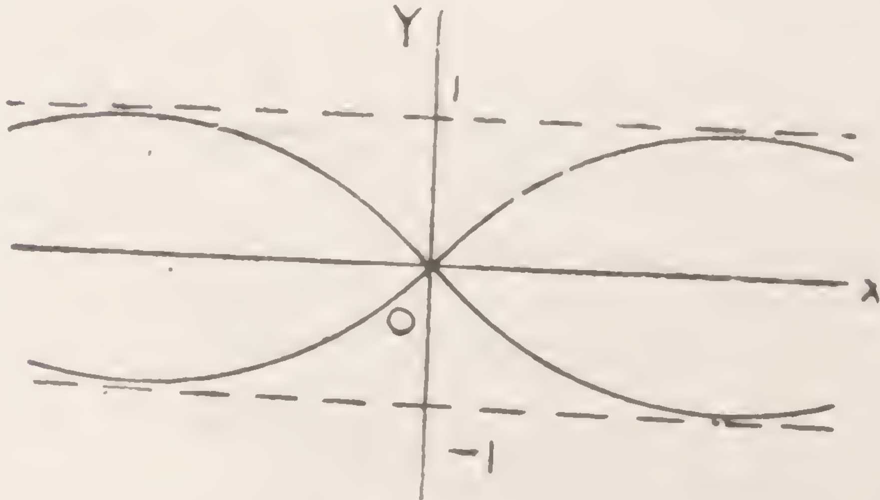
ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(ii) ಮೂಲಬಿಂದುವು ರೇಖೆಯಮೇಲಿದೆ.

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = \pm \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

(iv) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $y = \pm x$.

(v) $y = \pm 1$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಅಸಂಪಾತಿಗಳು. ರೇಖೆಯು $-1 < y < 1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಇದೆ.



ಆಕೃತಿ 16–4

ಒಂದನೆಯ ಚೌಭಾಗದ ರೇಖಾಭಾಗವನ್ನೆಳೆದು ಅದನ್ನು OX, OY ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸಿದರೆ, ಇಡೀ ರೇಖೆಯು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಒಂದನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಆರೋಹಿಯಾಗಿ, $x \to \infty$ ಆದಂತೆ $y=1$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16·4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

5. $$y^2(x^2-1)=x^2(x^2-4)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(i) x ಮತ್ತು y ಗಳ ಘಾತಗಳು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯು OX, OY ಅಕ್ಷಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿನ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆದು ಉಳಿದ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬನದಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು. ದತ್ತಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(ii) $y=0$ ಆದಾಗ, $x=0, \ \pm 2$. $\therefore$ ರೇಖೆಯು $x-$ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) $1<|x|<2$ ಆದಾಗ, y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ. $\therefore \ -2<x<-1$ ಮತ್ತು $1<x<2$ ಎಂಬ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ರೇಖೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

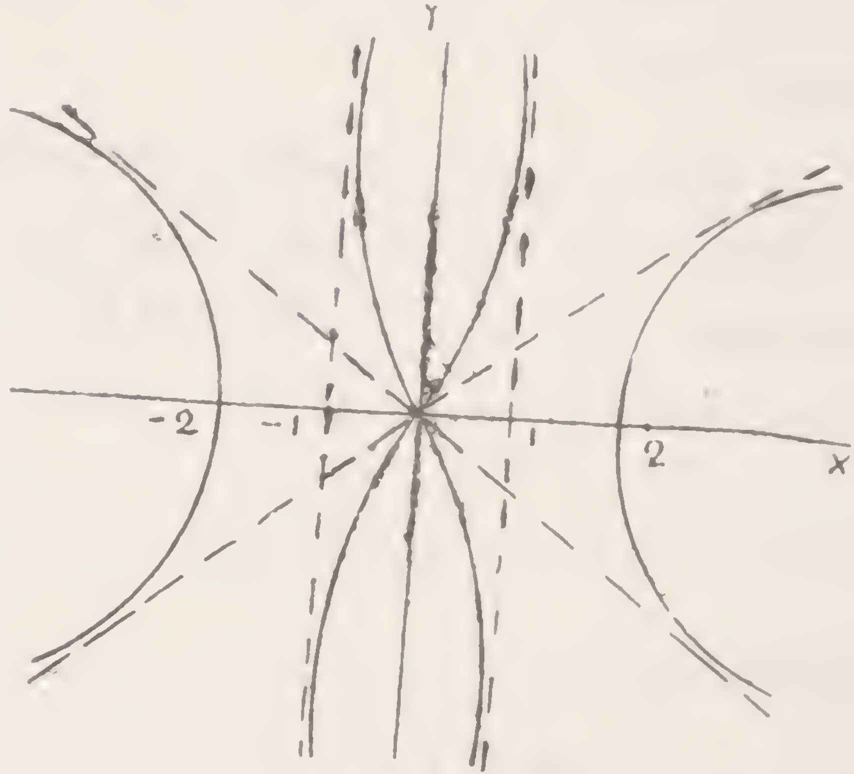
(iv) $$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4-2x^2+4}{\sqrt{[(x^2-1)(x^2-4)]}}$$

(v) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $y=\pm 2x$.

(vi) $x = \pm 1, \ \pm 2$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತವು ಅನಂತ.

(vii) ಗರಿಷ್ಠ ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದುಗಳಿಲ್ಲ.

(viii) $x = \pm 1, \ y = \pm x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಅಸಂಪಾತಿಗಳು. ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಎಂದರೆ $x \geq 0, \ y \geq 0$



ಆಕೃತಿ 16·5

ಆದಾಗ, ರೇಖೆಯು $x = 1$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಎಡಗಡೆಯಿಂದಲೂ, $y = x$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದಲೂ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ.

ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16-5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

6. $$r \text{ ಸೆಕ್}\,\theta = a \text{ ಸೈನ್}^4\theta$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

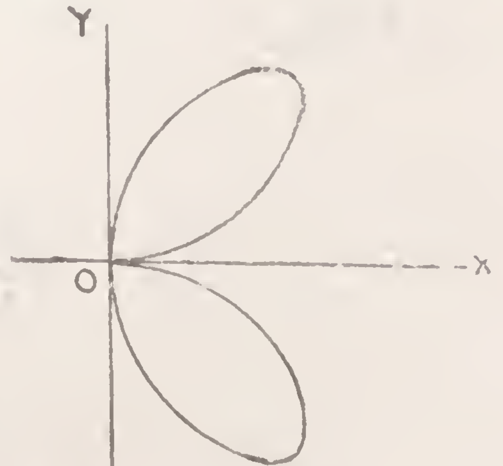
(i) θ ಗೆ ಬದಲು $(-\theta)$ ಹಾಕುವುದರಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಸಮ ಸಂಗತಿ ಇದೆ.

(ii) $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ, $r\geq 0$. ಅಲ್ಲದೆ, $\theta=\theta_1$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta_1\leq\frac{\pi}{2}\right)$ ಆದಾಗ $r=r_1$ ಆದರೆ, $\theta=180°+\theta_1$ ಆದಾಗ $r=-r_1$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, (r_1, θ_1), $(-r_1, 180°+\theta_1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾದುವು. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯು 1 ಮತ್ತು 4 ನೆಯ ಚೌಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ. ಇಡೀ ರೇಖೆಯನ್ನು 1 ನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ಆದಿರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಅದರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

(iii) $\theta=$ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}2$ ಆದಾಗ, r ನ ಬೆಲೆಯು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು r ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು $R=\frac{16\sqrt{5}}{125}a$.

(iv) θ ದ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ ಟ್ಯಾನ್$^{-1}2$ ಗೆ ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ, r ನ ಬೆಲೆಯು 0 ಇಂದ ಅದರ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯಾದ R ಗೆ ವರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. θ ದ ಬೆಲೆಯು ಟ್ಯಾನ್$^{-1}2$ ಇಂದ $\pi/2$ ಗೆ ವರ್ಧಿಸಿದಂತೆ r ನ ಬೆಲೆಯು R ಇಂದ 0 ಗೆ ಕ್ಷೀಣಿಸುತ್ತದೆ.

(v) ಧ್ರುವದಲ್ಲಿ $\theta=0, \theta=\pi/2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು.



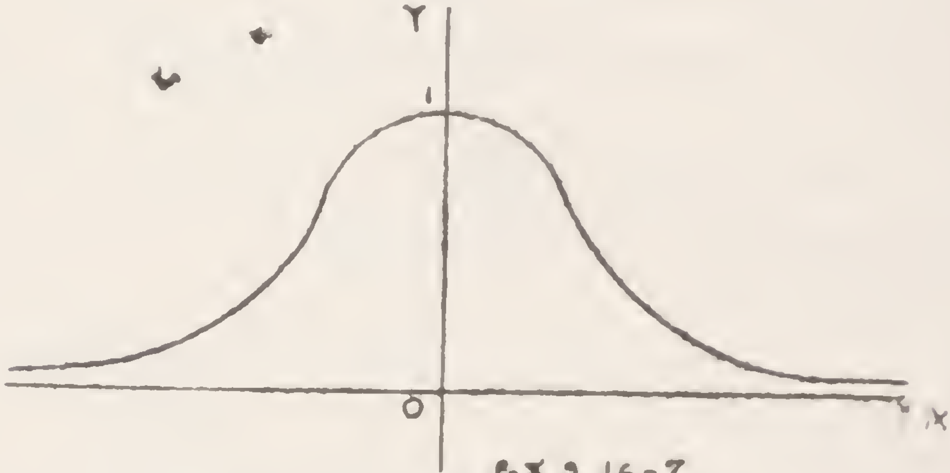
ಆಕೃತಿ 16-6

(vi) ಈ ರೇಖೆಯ ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಸಮೀಕರಣವು $(x^2+y^2)^3=axy^4$.

ರೇಖೆಯು ಸಮವಾದ ಎರಡು ಸುಷಿರಗಳಿಂದ (loops) ಆಗಿದೆ. (ಆಕೃತಿ 16-6).

7. $$y = e^{-x^2}$$
ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

(i) x ನ ಘಾತವು ಸರಿಸಂಖ್ಯೆಯಾದ್ದರಿಂದ, ರೇಖೆಯು $y-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ.



ಆಕೃತಿ 16-7

(ii) y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಸದಾ ಧನ.

(iii) $x \to \pm\infty$ ಆದಾಗ, $y \to 0$. $x-$ಅಕ್ಷವು ಎರಡು ಕೊನೆಗಳಲ್ಲೂ ಅಸಂಪಾತಿ.

(iv) ರೇಖೆಯು $y-$ಅಕ್ಷವನ್ನು $(0, 1)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(v) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{e^{x^2}}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2(2x^2-1)}{e^{x^2}}$.

(vi) $(-\infty, 0)$ ಎಂಬ $x-$ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಆರೋಹಿ ; $(0, \infty)$ ಎಂಬ $x-$ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು ಅವರೋಹಿ.

(vii) ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು (0, 1).

(viii) ಪ್ರತಿವಲನಬಿಂದುಗಳು $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳು $\pm\frac{1}{e}\sqrt{(2e)}$.

ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16–7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

8. $$y=\frac{\text{ಸೈನ್}\,x}{x}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

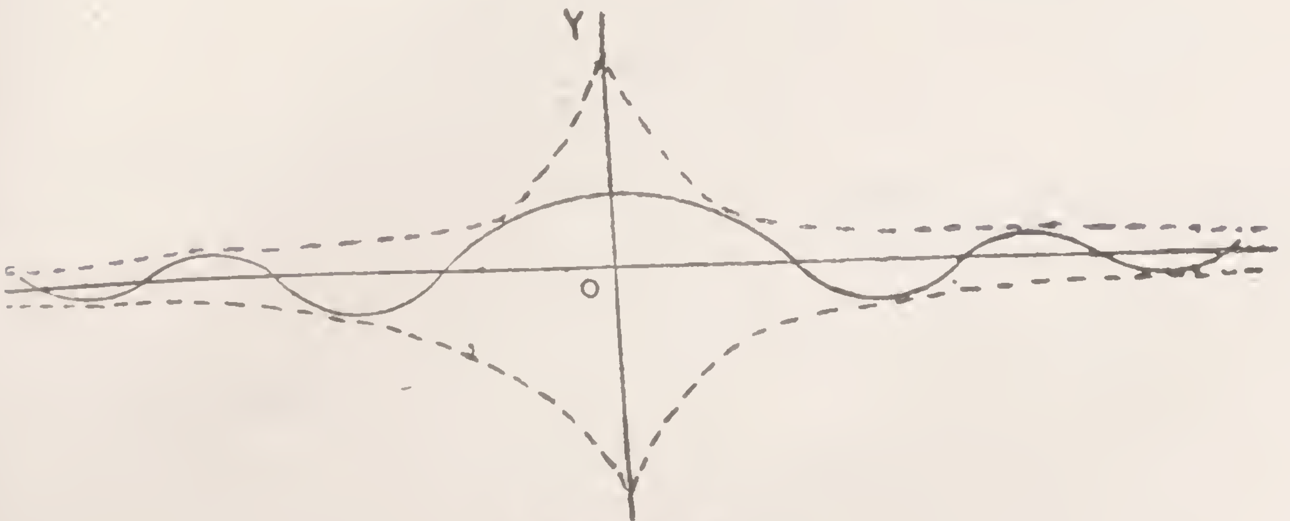
(i) $x=0$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆಯು ದತ್ತವಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, $x\to 0$ ಆದಾಗ, $y\to 1$. ಇಲ್ಲಿ $x=0$ ಆದಾಗ y ಗೆ y ನ ಪರಿಮಿತಿಯ ಮೂಲ್ಯವನ್ನೇ ಇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಅಧ್ಯಾಹಾರ ; ಎಂದರೆ, $x=0$ ಆದಾಗ, $y=1$.

(ii) ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷವನ್ನು

$$(\pm\pi, 0), (\pm 2\pi, 0), (\pm 3\pi, 0), \ldots$$

ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{ಕಾಸ್}\,x}{x}-\frac{\text{ಸೈನ್}\,x}{x^2}.$$



ಆಕೃತಿ 16–8

(iv) $x \to 0$ ಆದಾಗ $y' \to 0$ (ಲ ಹಾಸ್ಪಿಟಲ್ ಸೂತ್ರದಿಂದ). ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು (0, 1).

(v) ವಕ್ರರೇಖೆಯು $y = \pm \frac{1}{x}$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು

$$x = \pm \frac{\pi}{2},\quad \pm \frac{3\pi}{2},\quad \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೂ y – ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮ, ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳೂ ಸಮ.

(vi) $y = \frac{1}{x}$ ಸೈನ್ x

$$= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots.$$

$\therefore$ ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸಾಮಿಪ್ಯದಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು $y - 1 = -\frac{x^2}{6}$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪವನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ.

ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16–8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

9. $$y = \frac{\text{ಕಾಸ್}\ x}{x}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

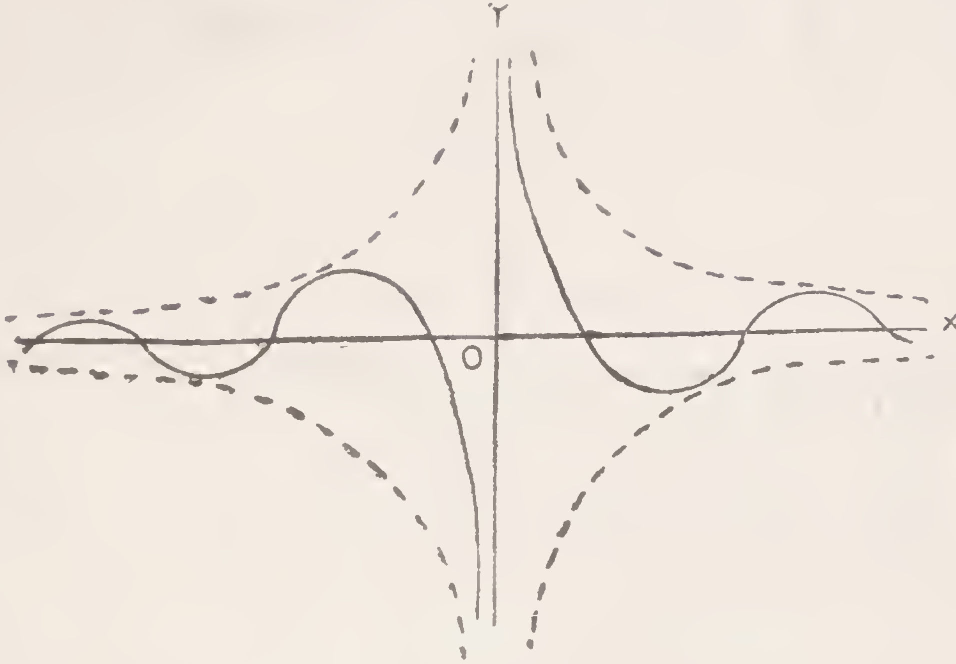
(i) ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು

$$\left(\pm \frac{\pi}{2}, 0\right),\quad \left(\pm \frac{3\pi}{2}, 0\right),\quad \left(\pm \frac{5\pi}{2}, 0\right), \ldots$$

ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) $x \to 0$ ಆದಾಗ, $y \to \infty$.

(iii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{ಸೈನ್}\,x}{x} + \frac{\text{ಕಾಸ್}\,x}{x^2}$.



ಆಕೃತಿ 16-9

(iv) ದತ್ತರೇಖೆಯು $y = \pm\frac{1}{x}$ ಎಂಬ ಸಮಾತಿಕ್ಷೇಪವನ್ನು

$$x = \pm\pi, \ \pm 2\pi, \ \pm 3\pi, \ldots$$

ಎಂಬಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ; ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೂ y – ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು ಸಮ, ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಪಾತಗಳೂ ಸಮ.

ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16–9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

10. $$y = \text{ಲಾಗ್ ಸೈನ್}\,x$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

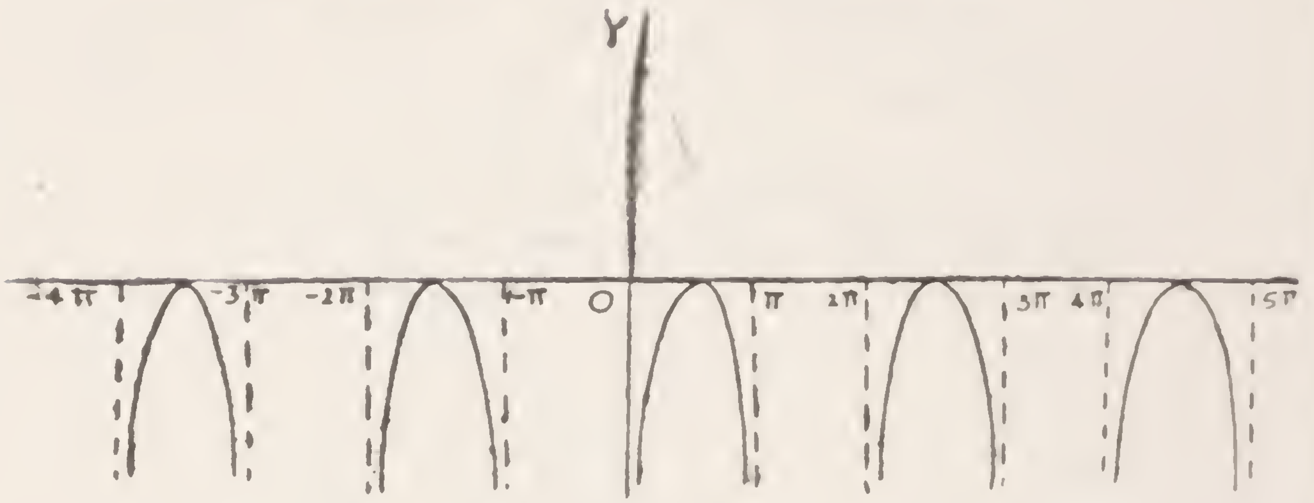
ಮೊದಲು $0 < x < \pi$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ

(i) ಸೈನ್ $x \leqslant 1$ ಆದ್ದರಿಂದ, $y \leqslant 0$.

(ii) ಸೈನ್$(\pi - x) =$ ಸೈನ್ x ಆದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತರೇಖೆಯು $x = \pi/2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ.

(iii) $x = 0$ ಮತ್ತು $x = \pi$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು ಅಸಂಪಾತಿಗಳು.

(iv) $y' =$ ಕಾಟ್ x, $y'' = -$ ಕೋಸೆಕ್$^2 x$.



ಆಕೃತಿ 16-10

(v) ರೇಖೆಯು $0 < x < \pi/2$ ರಲ್ಲಿ ಆರೋಹಿ, ಮತ್ತು $\pi/2 < x < \pi$ ನಲ್ಲಿ ಅವರೋಹಿ.

(vi) ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು $(\pi/2, 0)$.

$\pi < x < 2\pi$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯಿಲ್ಲ. $2\pi < x < 3\pi$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯ ಆಕಾರವು $0 < x < \pi$ ನಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆಯೆ. ಹೀಗೆಯೇ ರೇಖೆಯು ಪದಾಂತರ (alternate) ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ.

ರೇಖೆಯನ್ನು ಆಕೃತಿ 16-10 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

16.3. ಕೆಲವು ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ರೇಖೆಗಳು (some well-known curves).

ಕೆಲವು ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ರೇಖೆಗಳ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನೂ ವಿಶೇಷ ಗುಣಗಳನ್ನೂ ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

(1) ಪರಿಕ್ಷೇಪದ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ (evolute of the parabola).

$$27ay^2 = 4(x-2a)^3.$$

(i) ಇದೊಂದು ಘನಾರ್ಧ ಪರಿಕ್ಷೇಪ (semi-cubical parabola). x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. $(2a, 0)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಕುಶಬಿಂದು (cusp), ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $y=0$ (ಆಕೃತಿ 12–11).

(ii) $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಇದು ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ. ಈ ರೇಖೆಗಳು $(8a, \pm 4\sqrt{2}\cdot a)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(iii) ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಬಲಗಡೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $27ay^2 - 4(x-2a)^3 > 0$. ಈಗ, $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ $(at^2, 2at)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆಯು $y + tx = 2at + at^3$. ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ t_1, t_2. t_3 ಎಂಬ ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಮೂಲಗಳಿರಬೇಕಾದರೆ, $27ay^2 - 4(x-2a)^3 > 0$ ಆಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಗೆ ಬಲಗಡೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಮೂರು ಪರಸ್ಪರ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಲಂಬಗಳನ್ನೆಳೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆಯೇ, ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಎಡಗಡೆ ಇರುವ ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ $27ay^2 - 4(x-2a)^3 < 0$ ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂಥ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು; ಇನ್ನೆರಡು ಲಂಬಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ, ಆದರೆ ಕುಶಬಿಂದುವಲ್ಲದ, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಲಂಬರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗಿಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಕುಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ (cusp) $y^2 = 4ax$ಗೆ ಎಳೆಯಬಹುದಾದ ಮೂರು ಲಂಬಗಳೂ ಐಕ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಅವಲುಪ್ತಿಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ (evolute of the ellipse).

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

(i) ಇದೊಂದು ಚತುರ್ವಿದಾರಿ (tetra - cuspidal curve). x – ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ, ಮತ್ತು ಆ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ತನ್ನ ಕುಶಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ (cusps) ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ (quadrant) ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದೆ ಆಕೃತಿ 12-12.

(ii) θ ಎಂಬ ಪರಮಾನದಲ್ಲಿ ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \text{ಕಾಸ್}^3\theta, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{b} \text{ಸೈನ್}^3\theta$$

(iii) ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ x – ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಅಂತರ್ಗತವಾದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣ.

(iv) ಈ ರೇಖೆಯು $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿಯ ವಿಕಾಸಿರೇಖೆ.

(v) ಅವಲುಪ್ತಿಯ ಅತಿರೇಖವು (eccentricity, e) $\geqslant 1/\sqrt{2}$ ಆದರೆ, ವಿಕಾಸಿರೇಖೆಯು ಅವಲುಪ್ತಿಯನ್ನು ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

(vi) ಈ ರೇಖೆಯ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)$.

(3) ನಾಕ್ಷತ್ರಿ (astroid).

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

(i) ಈ ರೇಖೆಯು $x-$ ಮತ್ತು $y-$ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. ಒಂದನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ (quadrant) ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದೆ. $x-$ ಮತ್ತು $y-$ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಈ ರೇಖೆಯ ಕುಶಬಿಂದುಗಳು (cusps). [(A) ಆಕೃತಿ 16–11)].

(ii) $x-$ ಮತ್ತು $y-$ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಅಂತರ್ಗತವಾದ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣ.

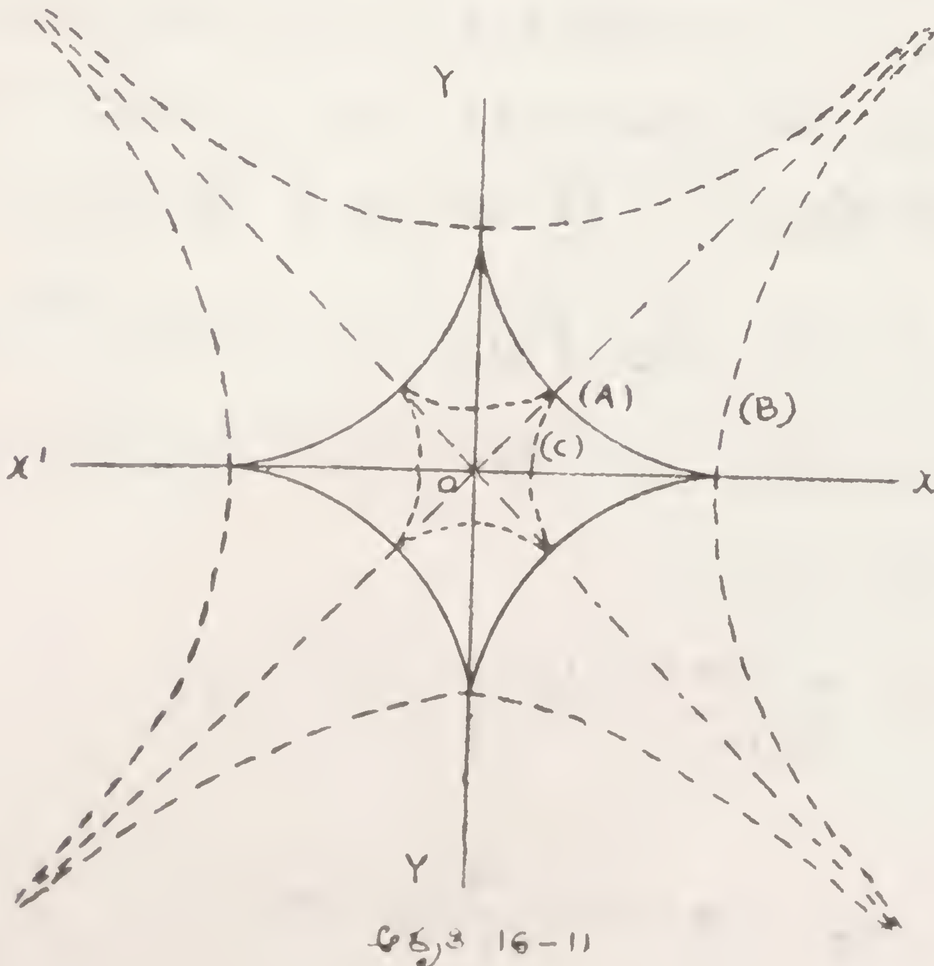
(iii) t ಎಂಬ ಪರಮಾನದಲ್ಲಿ ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x = a \text{ ಕಾಸ್}^3 t, \; y = a \text{ ಸೈನ್}^3 t \qquad \ldots. \quad (A)$$

(iv) ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು (evolute)

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = (2\sqrt{2} \cdot a)^{\frac{2}{3}} \qquad \ldots. \quad (B)$$

ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿ (ಉದಾ 23, ಅಭ್ಯಾಸ 12).

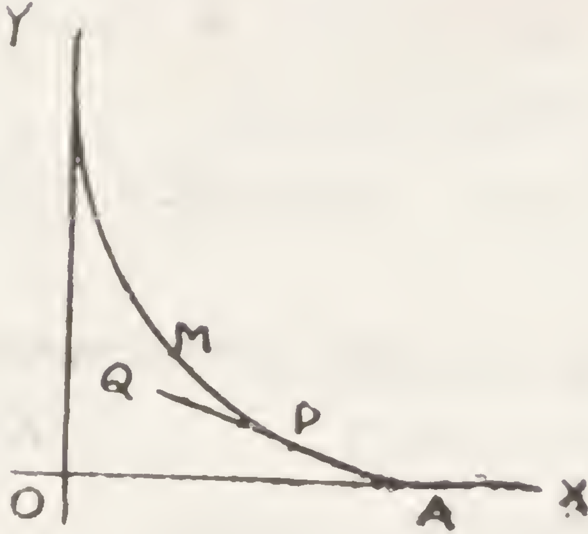


ಆಕೃತಿ 16–11

(v) ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯ ವಿಕಾಸಜನ್ಯರೇಖೆ (involute of an astroid): ದತ್ತ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯವು $x = a$ ಕಾಸ್$^3 t$, $y = a$ ಸೈನ್$^3 t$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ $dy/dx = -$ ಟ್ಯಾನ್ t.

$\therefore \quad \psi = 180° - t$ ಮತ್ತು $ds = -3a$ ಕಾಸ್ t ಸೈನ್ t dt.

$\therefore \quad t = \pi/4$ ಆದಾಗ $s = 0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ,



ಆಕೃತಿ ೧೨

$$s = \frac{3a}{4} \text{ ಕಾಸ್ } 2t$$ ಆಕೃತಿ 16–12 ರಲ್ಲಿ M ಬಿಂದುವಿಗೆ $t = \pi/4$, A ಬಿಂದುವಿಗೆ $t = 0$, ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವು t ಎಂಬ ಒಂದು ಪ್ರಚಲಿತಬಿಂದು. ಈಗ MA ಎಂಬ ಕಂಸಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಸಿರುವ ಒಂದು ವಿಕಾಸ ತಂತುವನ್ನು M ನಿಂದ P ವರೆಗೆ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಅಂತಿಮ ಬಿಂದುವು Q ಆದರೆ, Q ಬಿಂದುವು ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಯಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯಮೇಲಿದೆ, ಮತ್ತು PQ= ಕಂಸ $\text{MP} = \frac{3a}{4}$ ಕಾಸ್ $2t$.

ಈಗ Q ಬಿಂದುವು (x_2, y_2) ಆದರೆ. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ,

$$\frac{x_2 - a \text{ ಕಾಸ್}^3 t}{-\text{ಕಾಸ್ } t} = \frac{y_2 - a \text{ ಸೈನ್}^3 t}{\text{ಸೈನ್ } t} = \text{PQ} = \frac{3a}{4} \text{ ಕಾಸ್ } 2t.$$

$$\therefore \qquad x_2 = a \text{ ಕಾಸ್}^3 t - \frac{3a}{4} \text{ ಕಾಸ್ } t \text{ ಕಾಸ್ } 2t$$

$$= \frac{3a}{4} \text{ಕಾಸ್}\, t - \frac{a}{2} \text{ಕಾಸ್}^3 t\,;$$

ಮತ್ತು $y_2 = a \text{ ಸೈನ್}^3 t + \frac{3a}{4} \text{ಸೈನ್}\, t \text{ ಕಾಸ್}\, 2t$

$$= \frac{3a}{4} \text{ಸೈನ್}\, t - \frac{a}{2} \text{ಸೈನ್}^3 t.$$

∴ Q ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ, ಎಂದರೆ ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಯ, ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x = \frac{3a}{4} \text{ಕಾಸ್}\, t - \frac{a}{2} \text{ಕಾಸ್}^3 t,$$

$$y = \frac{3a}{4} \text{ಸೈನ್}\, t - \frac{a}{2} \text{ಸೈನ್}^3 t.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

ಇದೂ ಒಂದು ನಾಕ್ಷತ್ರಿ.

(A), (B), (C) ಎಂಬ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿ 16-11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯು ದತ್ತರೇಖೆ (A). ಹೊರಗಿನ ಬಿಂದುಸಹಿತ (dotted) ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯು ದತ್ತರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಿರೇಖೆ (B). ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುಸಹಿತ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯು ದತ್ತರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆ (C). ಈ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಗಳ ಅರ್ಧಾಕ್ಷಗಳ (semi-axes) ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, $2\sqrt{2}a$ ಮತ್ತು $a/\sqrt{2}$. ಈ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ದತ್ತರೇಖೆಗೆ 1, 2, 3, ..., n ನೆಯ ವಿಕಾಸಿ ಮತ್ತು ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಗಳಾಗಿದ್ದು

ಒಂದರಲ್ಲೊಂದು ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯೂ ಅದರ ಒಳಗಿನ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (C) ಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಪರಮಾನರೂಪವೂ ಇದೆ. ಅದಾವುದೆಂದರೆ,

$$x+y=\frac{a}{\sqrt{2}}\text{ಕಾಸ್}^3\theta, \quad x-y=\frac{a}{\sqrt{2}}\text{ಸೈನ್}^3\theta\ ;$$

ಎಂದರೆ,
$$x=\frac{a}{2\sqrt{2}}(\text{ಕಾಸ್}^3\theta+\text{ಸೈನ್}^3\theta),$$

$$y=\frac{a}{2\sqrt{2}}(\text{ಕಾಸ್}^3\theta-\text{ಸೈನ್}^3\theta).$$

ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿನ θ ಎಂಬ ಪರಮಾನಕ್ಕೂ, ಮೇಲಿನ t ಎಂಬ ಪರಮಾನಕ್ಕೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. t ಎಂಬ ಪರಮಾನದಲ್ಲಿ C ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು (a ಕಾಸ್^3t, b ಸೈನ್^3t) ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. t ಎಂಬ ಪರಮಾನದಲ್ಲಿ (B) ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x=3a\ \text{ಕಾಸ್}\,t-2a\ \text{ಕಾಸ್}^3t,$$
$$y=3a\ \text{ಸೈನ್}\,t-2a\ \text{ಸೈನ್}^3t$$

ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು, C ರೇಖೆಯ t – ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ a ಗೆ ಬದಲು $4a$ ಹಾಕಿ, ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ, A, B, C ಎಂಬ ಮೂರು ರೇಖೆಗಳಿಗೂ t ಎಂಬ ಒಂದೇ ಪರಮಾನ ದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ $s=\frac{3a}{4}$ ಕಾಸ್ $2t$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರ ಣದ ಬದಲು $s=-\frac{3a}{2}$ ಸೈನ್^2t ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ,

ಆಗ, $t=0$ ಆದಾಗ $s=0$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಯ ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳು

$$x = a\ \text{ಕಾಸ್}^3 t + \frac{3a}{2}\text{ಕಾಸ್}\, t\ \text{ಸೈನ್}^2 t$$

$$= \frac{3a}{2}\text{ಕಾಸ್}\, t - \frac{a}{2}\text{ಕಾಸ್}^3 t,$$

$$y = a\ \text{ಸೈನ್}^3 t - \frac{3a}{2}\text{ಸೈನ್}\, t\ \text{ಸೈನ್}^2 t$$

$$= -\frac{a}{2}\text{ಸೈನ್}^3 t$$

ಆಗುತ್ತವೆ. ಈ ರೇಖೆಯ ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರವು (a ಕಾಸ್$^3 t$, a ಸೈನ್$^3 t$) ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲೇ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಈ ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆಯು ಆಕೃತಿ 16–11 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ (C) ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲ; ಇದು ಮತ್ತೊಂತು ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆ.

(vi) (2), § 16.3 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅವಲುಪ್ತಿ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಕಾಸ ರೇಖೆಗಳು $ax=u$, $by=v$ ಎಂಬ ಪರಿವರ್ತನೆಯಿಂದ

$$\frac{u^2}{a^4}+\frac{v^2}{b^4}=1,\ \text{ಮತ್ತು}\ u^{\frac{3}{4}}+v^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

ಎಂಬ ಅವಲುಪ್ತಿ ಮತ್ತು ನಾಕ್ಷತ್ರಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಈ ಅವಲುಪ್ತಿಗೆ ಈ ನಾಕ್ಷತ್ರಿಯು ವಿಕಾಸಿರೇಖೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಅವಲುಪ್ತಿಯ ವಿಕಾಸಿರೇಖೆಯು

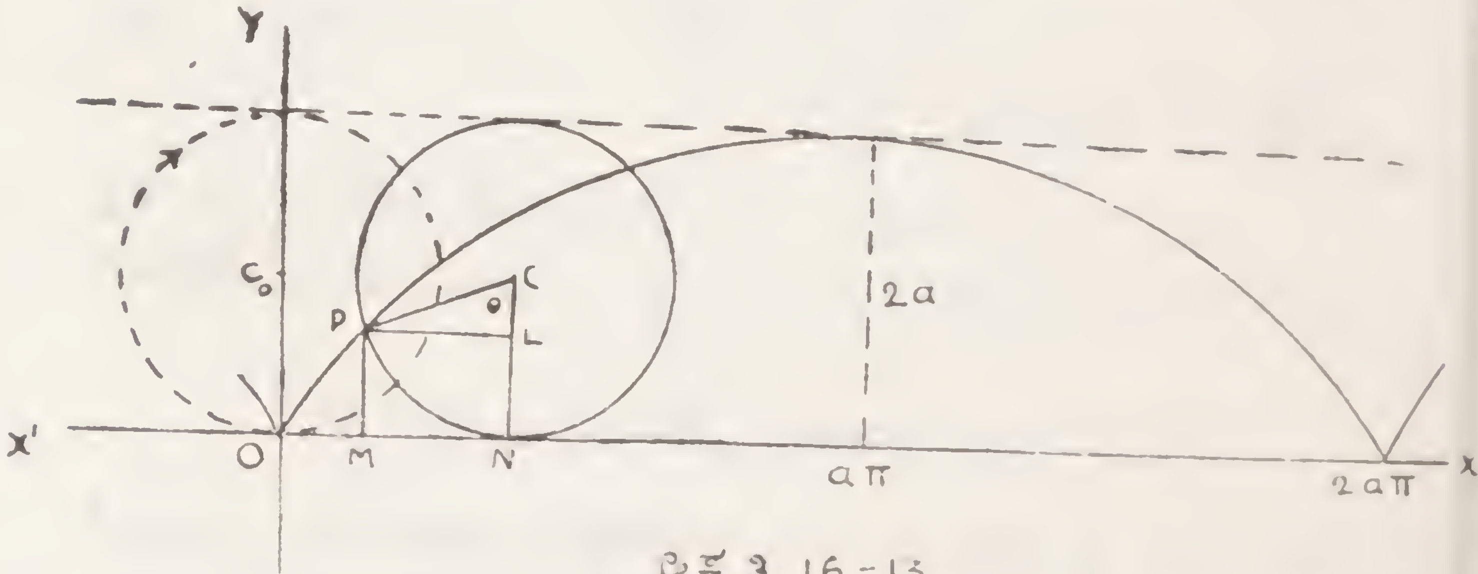
$$(a^2u)^{\frac{2}{3}}+(b^2v)^{\frac{2}{3}}=(a^4-b^4)^{\frac{2}{3}}.$$

ಕೇವಲ ಒಂದು ಬಿಂದು ಪರಿವರ್ತನೆಯಿಂದ (point-transformation) ವಿಕಾಸಜನ್ಯ – ವಿಕಾಸಿ ಸಂಬಂಧಕ್ಕೆ ಭಂಗಬರಬಹುದೆಂಬುದಕ್ಕೆ ಇದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ.

(4) ಚಾಕ್ರೇಯು (cycloid).

$$x = a(\theta - \text{ಸೈನ್}\,\theta),\ \ y = a(1 - \text{ಕಾಸ್}\,\theta).$$

(i) ಒಂದು ಚಕ್ರದ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ, ಆ ಚಕ್ರವನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಉರುಳಿಸಿದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು ಈ ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ, ಚಕ್ರದ ಕೇಂದ್ರ C, ತ್ರಿಜ್ಯ a, ಮತ್ತು ಅದರ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತು ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದು P ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಆಕೃತಿ 16–13). ಚಕ್ರವು X′X ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಉರುಳಿಸಲ್ಪಡಲಿ. ಚಕ್ರದ ಕೇಂದ್ರವು C_0 ಎಂಬಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, P ಬಿಂದುವು X′X ರೇಖೆಯಮೇಲಿನ O ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ



ಆಕೃತಿ 16-13

ಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. O ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಯೂ, OX ರೇಖೆಯನ್ನು x – ಅಕ್ಷವನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಚಕ್ರವು OX ರೇಖೆಯಮೇಲೆ ಉರುಳಿ, ಚಕ್ರದ ಕೇಂದ್ರವು C ಎಂಬಲ್ಲಿಗೆ ಬಂದಾಗ, ಅದರ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತುಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟಿರುವ ಬಿಂದುವು P(x, y) ಎಂಬಲ್ಲಿಗೆ ಬರುತ್ತದೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ OM $= x$,

ಮತ್ತು $MP = y$. ಅಲ್ಲದೆ ಚಕ್ರದ ಉರುಳುವಿಕೆಯಿಂದ, ಕಂಸ PN = ON. ಈಗ $\angle PCN = \theta$ ಆದರೆ,

$$x = OM = ON - MN = \text{ಕಂಸ } PN - MN$$

$$= a\theta - a \text{ ಸೈನ್}\theta = a(\theta - \text{ಸೈನ್}\theta) ;$$

$$y = MP = NC - LC$$

$$= a - a \text{ ಕಾಸ್}\theta = a(1 - \text{ಕಾಸ್}\theta).$$

ಚಕ್ರವು ಒಂದು ಸಂಪೂರ್ಣ ಆವೃತ್ತಿಯನ್ನು ಮುಗಿಸಿದಾಗ, P ಬಿಂದುವು, O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ $2a\pi$ ದೂರದಲ್ಲಿ, ಮತ್ತೆ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಚಕ್ರವು ಉರುಳುತ್ತ ಹೋದಂತೆ, P ಬಿಂದುವಿನ ಪಥದ ಆಕೃತಿಯೂ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪಥವು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು ಕುಶಬಿಂದುಗಳು (cusps). ರೇಖೆಯು ಆವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ, ಒಂದು ಕುಶಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಕುಶಬಿಂದುವಿನವರೆಗಿನ ರೇಖೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದರೆ ಸಾಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

(ii) $\theta = 0$ ಆದಾಗ, $x = 0 = y$; $\therefore$ ರೇಖೆಯು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುತ್ತದೆ. $\theta = 2\pi$ ಆದಾಗ, $x = 2a\pi$, $y = 0$; $\therefore$ ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷವನ್ನು $(2a\pi, 0)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೆ, ಕಾಸ್$(\pi - \alpha)$ = ಕಾಸ್$(\pi + \alpha)$ ಆದ್ದರಿಂದ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖೆಯು $x = a\pi$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಗೌರವಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು $(a\pi, 2a)$.

(iii) $\frac{dy}{dx}=$ ಕಾಟ್$\frac{\theta}{2}$; $\frac{ds}{d\theta}=2a$ ಸೈನ್$\frac{\theta}{2}$.

(iv) ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯವು ರೇಖೆ ಮತ್ತು $x-$ ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಅಂತರ್ಗತವಾದ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಿರುತ್ತದೆ.

(5) ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆ (ಅಭಿಗಾಮಿ, cissoid).

$$y^2(2a-x)=x^3.$$

(i) ಈ ರೇಖೆಯು $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. ಮೂಲ ಬಿಂದುವು ಕುಶಬಿಂದು (cusp), ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $y=0$. ಈ ರೇಖೆಗೆ $x=2a$ ಎಂಬ ಅಸಂಪಾತಿಯಿದೆ, ಮತ್ತು ರೇಖೆಯು ಈ ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದನೆಯ ಚಾಥಾಗದಲ್ಲಿ (quadrant) ರೇಖೆಯು ಆರೋಹಿಯಾಗಿದೆ. $x<0$ ಅಥವಾ $x>2a$ ಆದಾಗ, y ನ ಬೆಲೆಗಳು ಭಾವನಾತ್ಮಕ.

(ii) ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$r=2a \text{ ಸೈನ್}\theta \text{ ಟ್ಯಾನ್}\theta.$$

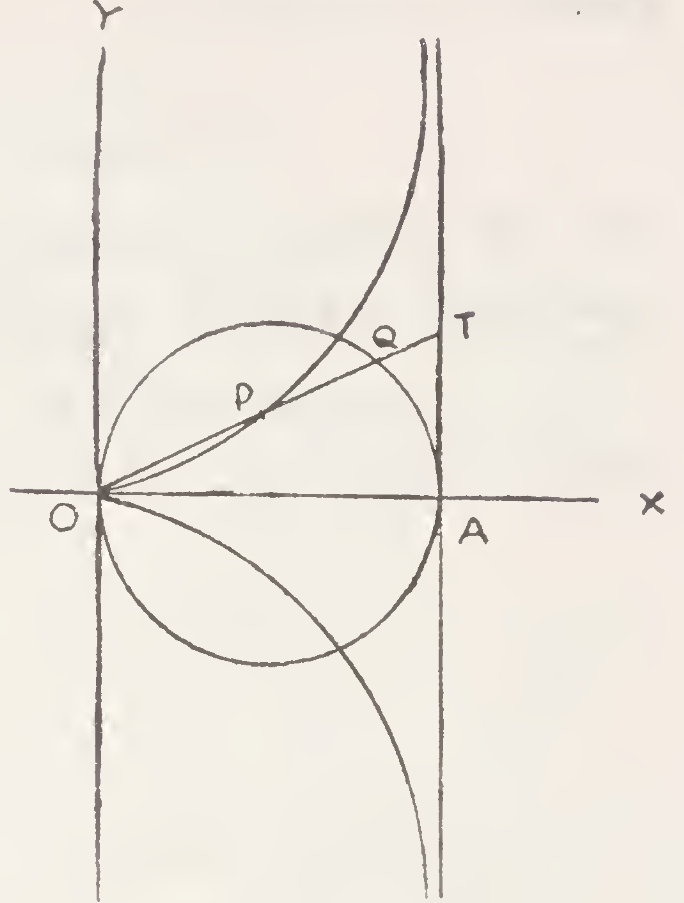
ಇದರಿಂದ. ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $2a$ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ (diameter) ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OA ಎಂಬ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ, O ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ, ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 16-14). ವರ್ತುಳಕ್ಕೆ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ AT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಸರಳ

ರೇಖೆಯು ವರ್ತುಳವನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ, AT ಯನ್ನು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಸಂಧಿಸಲಿ. OQ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ P ಬಿಂದುವನ್ನು $OP = QT$ ಆಗುವಂತೆ ಗುರುತುಮಾಡಿದರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $\angle AOP = \theta$ ಆದರೆ, ಆಗ $\angle QAT = \theta$.

$\therefore \; r = OP = QT$

$= QA$ ಟ್ಯಾನ್ θ

$= 2a$ ಸೈನ್ θ ಟ್ಯಾನ್ θ.



ಆಕೃತಿ 16-14

(iii) ಈ ರೇಖೆಯು $y^2 + 3ax = 0$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ಪ್ರಥಮ ಧನಪಾದೀಯ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ (first positive pedal).

(iv) $y^2 = 4ax$ ಎಂಬ ಪರಿಕ್ಷೇಪಕ್ಕೆ ಈ ರೇಖೆಯು ಮೂಲ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗೌರವಿಸಿ ವಿಲೋಮರೇಖೆಯಾಗಿದೆ (ವಿಲೋಮದ ಸ್ಥಿರಿ $2a$).

(v) $x = 2a$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಕಡೆಗೆ ಅಭಿಗಮಿಸುವುದರಿಂದ, ಈ ರೇಖೆಗೆ ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆಯೆಂಬ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿದಾತನು ಡಯೋಕ್ಲಿಸ್ (Diocles).

(6) ಪತ್ರಲತೆ (folium).

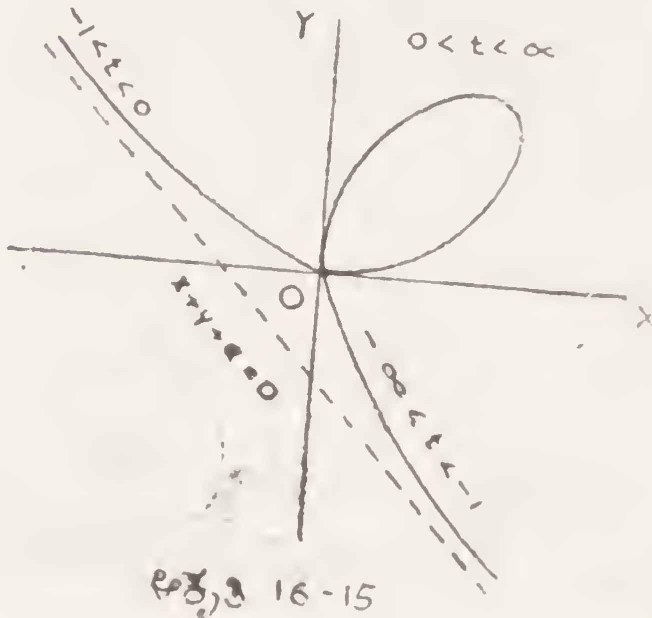
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

(i) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ $y=tx$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು, t ಎಂಬ ಪರಮಾನದಲ್ಲಿ, ಪತ್ರಲತೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು.

(ii) ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು x ಮತ್ತು y ಗಳ ವಿನಿಮಯದಿಂದ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ ರೇಖೆಯು $y=x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. $x+y+a=0$ ಎಂಬ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಇದರ ಅಸಂಪಾತಿ ಮತ್ತು ರೇಖೆಯು ಅಸಂಪಾತಿಯ ಮೇಲುಗಡೆಗೆ ಇದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕಂಠ ಬಿಂದು (node), ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $x-$ ಮತ್ತು $y-$ಅಕ್ಷಗಳು. ರೇಖೆಯು $-\infty<t<-1$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ 4ನೆಯ ಚಾಭಾಗ



ಆಕೃತಿ 16-15

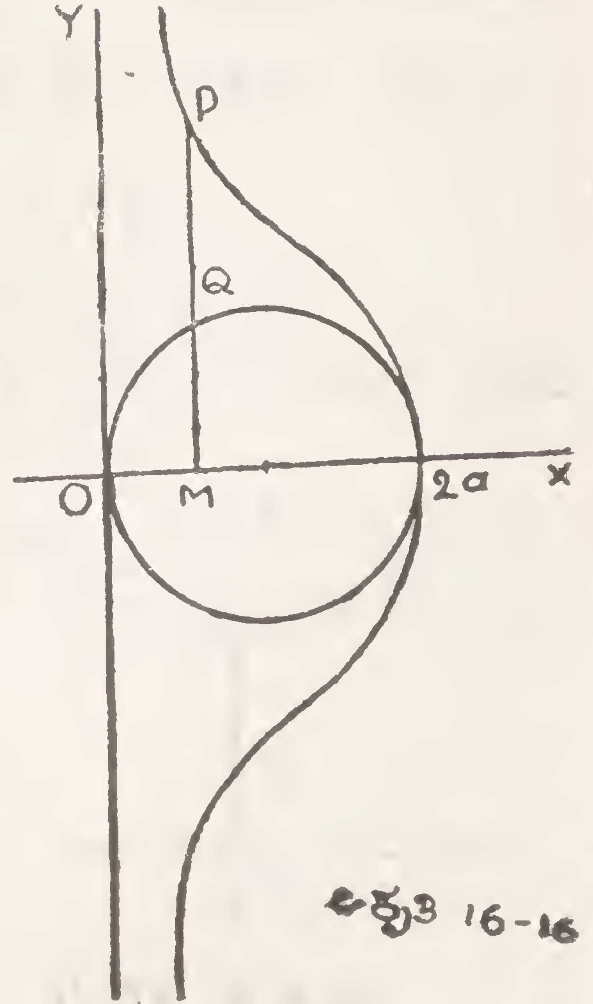
ದಲ್ಲೂ (quadrant), $-1<t<0$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ 2 ನೆಯ ಚಾಭಾಗದಲ್ಲೂ, $0<t<\infty$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ 1 ನೆಯ ಚಾಭಾಗ ದಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವು ರೇಖೆಯಮೇಲಿದೆ, ಮತ್ತು ಅಲ್ಲಿ $t=0$. ರೇಖೆಯು 3 ನೆಯ ಚಾಭಾಗವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸುವುದಿಲ್ಲ. $t\to-1+0$ ಆದಾಗ, $x\to-\infty$; $t\to-1-0$ ಆದಾಗ, $x\to+\infty$ ಮತ್ತು $t=1$ ಆದಾಗ, $x=y$. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು $t=2^{1/3}$ ಆದಾಗ $x-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲೂ, $t=2^{-1/3}$ ಆದಾಗ $y-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಒಂದನೆಯ ಚಾಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪತ್ರ ಅಥವಾ ಸುಷಿರವಿದೆ (loop). ಆಕೃತಿ 16–15.

(iii) ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾತನು ಡೆಕಾರ್ಟ್ (Des. Cartes).

(7) **ಮಾಂತ್ರಿಕರೇಖೆ (witch)**

$$xy^2 = 4a^2(2a - x).$$

(i) ಈ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, $2a$ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OA ಎಂಬ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಮೂಲ ರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ, O ಬಿಂದುವನ್ನು ಧ್ರುವವನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 16–16). ವರ್ತುಳದ ಮೇಲಿನ Q ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ QM ರೇಖೆಯು OA ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. MQ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು



ಆಕೃತಿ 16-16

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{OM}{OA}$$

ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ P ಬಿಂದುವು ಮಾಂತ್ರಿಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $MQ^2 = OM \cdot MA$ ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವು (x, y) ಆದರೆ, ಆಗ

$$\frac{MQ^2}{MP^2} = \frac{OM \cdot MA}{MP^2} = \frac{x(2a - x)}{y^2},$$

ಮತ್ತು
$$\frac{OM^2}{OA^2} = \frac{x^2}{4a^2}$$

$$\therefore \qquad xy^2 = 4a(2a - x).$$

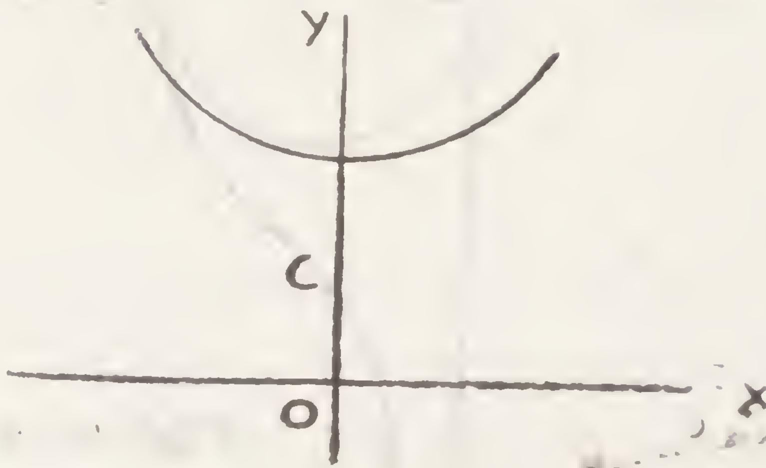
(ii) ಈ ರೇಖೆಯು $x-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. $y-$ಅಕ್ಷವು ಅಸಂಪಾತಿ, ಮತ್ತು ರೇಖೆಯು ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನು ಬಲಗಡೆಯಿಂದ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. $x<0$, $x>2a$ ಎಂಬ ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ y ಭಾವನಾತ್ಮಕ. $\left(\frac{3a}{2}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಪ್ರತಿವಲನಬಿಂದುಗಳು.

(iii) ಈ ರೇಖೆಯು ಆಗ್ನೆಸಿ (Agnesi) ಎಂಬಾತನಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿತು.

(8) ತಂತ್ರೀ ರೇಖೆ (catenary or chainette).

$$y = c \text{ ಕಾಷ್} \frac{x}{c}.$$

(i) ಕಾಷ್$(-\theta)=$ ಕಾಷ್θ ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ರೇಖೆಯು $y-$ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. (O, c) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಇದರ ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು. $x-$ಅಕ್ಷವು ದಿಕ್‌ಸ್ತಂಭ (directrix).



ಆಕೃತಿ 16-17

(ಆಕೃತಿ 16–17).

(ii) ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಆರೂಢದ (ordinate) ಪಾದದಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ ಲಂಬವು c ಎಂಬ ಸ್ಥಿರ; ಮತ್ತು ಈ ಲಂಬದ ಪಾದದ ಪಥವು ಒಂದು ಪಂಥಿನೀ ರೇಖೆ [(9), § 16.3].

(iii) ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯ $=y^2/c=$ ಲಂಬ ರೇಖಾಖಂಡ.

(iv) ತಂತ್ರೀರೇಖೆಯು ಪಂಥಿನೀರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆ.

(v) ಭಾರವಾದ ಒಂದು ತಂತಿಯನ್ನು ಅಡ್ಡವಾಗಿ ನೇತುಹಾಕಿದಾಗ, ಅದು ತಾಳುವ ಆಕೃತಿಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = c$ ಕಾಷ್(x/c) ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

(9) ಪಂಥಿನೀ (tractrix).

$$x = c\left(\text{ಕಾಸ್}\, t + \text{ಲಾಗ್ ಟ್ಯಾನ್}\frac{t}{2}\right)$$

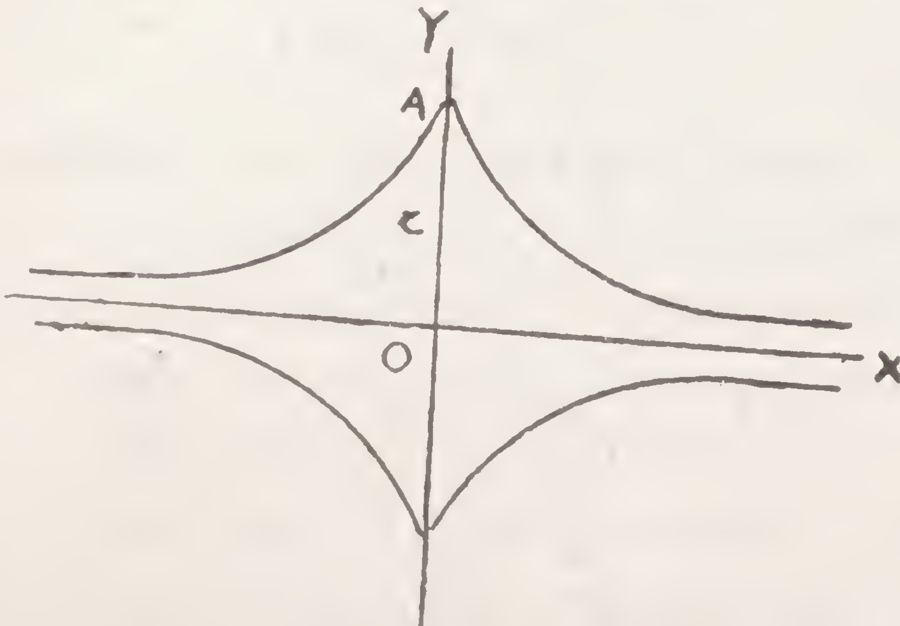
$$y = c\,\text{ಸೈನ್}\, t.$$

(i) ಈ ಪರಮಾನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ t ಯನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ, ಈ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು

$$x = \sqrt{(c^2 - y^2)} + \frac{c}{2}\text{ಲಾಗ್}\frac{c - \sqrt{(c^2 - y^2)}}{c + \sqrt{(c^2 - y^2)}}$$

ಎಂಬ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(ii) ಈ ರೇಖೆಯು $x-$ ಮತ್ತು $y-$ ಅಕ್ಷಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆ. ಒಂದನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲಿ (quadrant) ರೇಖೆಯು



ಆಕೃತಿ 16-18

ಅವರೋಹಿಯಾಗಿದೆ. ಈ ರೇಖೆಗೆ x – ಅಕ್ಷವು ಎರಡು ಕೊನೆಗಳಲ್ಲೂ ಅಸಂಪಾತಿಯಾಗಿದೆ. y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಕುಶಬಿಂದುಗಳಿವೆ. (cusps). $t \to 0$ ಆದಾಗ, $x \to -\infty$; $t \to \pi$ ಆದಾಗ, $x \to +\infty$. ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಕುಶಬಿಂದುಗಳು $t = \pi/2$ ಮತ್ತು $t = 3\pi/2$. (ಆಕೃತಿ 16–18).

(iii) ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡವು ಸ್ಥಿರಪ್ರಮಾಣ.

(iv) ಈ ರೇಖೆಯ ವಿಕಾಸಿ ರೇಖೆಯು ತಂತ್ರೀರೇಖೆ.

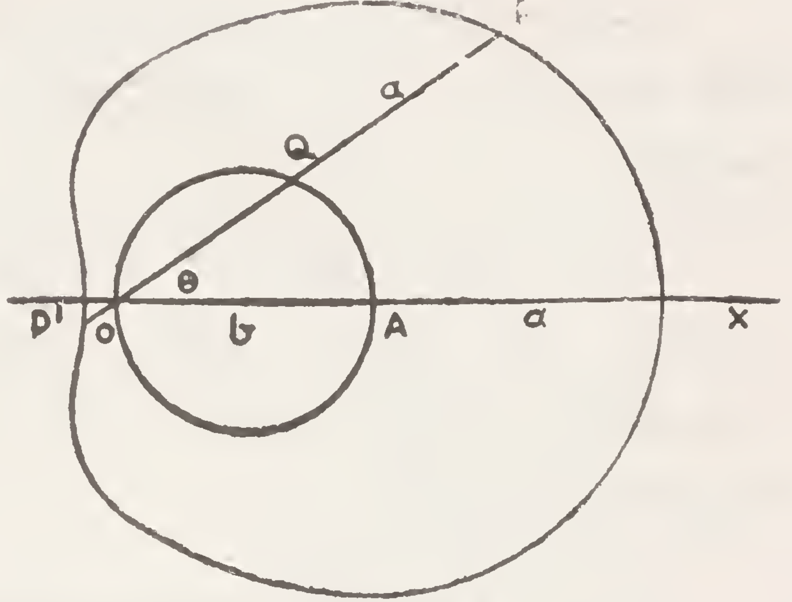
(v) ರೇಖೆಯು ಸಮತಲವು (plane) ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಕರ್ಕಶವಾದುದೆಂದು (perfectly rough) ಭಾವಿಸೋಣ. ಅದರ ಮೇಲೆ A ಎಂಬುದೊಂದು ಭಾರವಾದ ಕಣವೆಂದೂ (particle), OA ಎಂಬುದು ಆ ಕಣಕ್ಕೆ ಕಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ರಜ್ಜು (ಹಗ್ಗ) ವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. O ಎಂಬಲ್ಲಿರುವ ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನು ರಜ್ಜುವಿನ ಕೊನೆಯನ್ನು ಹಿಡಿದುಕೊಂಡು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ನಡೆದರೆ, ಆಗ A ಎಂಬ ಕಣದ ಪಥವು ಪಂಥನೀ ರೇಖೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

(10). ಮಹೀಲತೆ (limacon).

$$r = a + b \text{ ಕಾಸ್} \theta.$$

(i) ಈ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಬಹುದು. b ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OA ಎಂಬ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಆದಿರೇಖೆಯನ್ನಾಗಿಯೂ, O ಬಿಂದವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನಾಗಿಯೂ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಆಕೃತಿ 16–19). OA ಗೆ θ ಕೋನದಲ್ಲಿ OQ ಎಂಬ ಛೇದಕವನ್ನೆಳೆದರೆ, ಆಗ OQ = b ಕಾಸ್θ. ಛೇದಕ OQ ವನ್ನು P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ QP = a ಆಗುವಂತೆ ಉದ್ಘೋರ್ಣಿಸಿದರೆ (ಲಂಬಿಸು, produce) ಆಗ OP = $a + b$ ಕಾಸ್θ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ P ಬಿಂದುವು ಮಹೀಲತೆಯು

ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆಯೇ QO ರೇಖೆಯನ್ನು P′ ಬಿಂದುವಿಗೆ, QP′ $= a$ ಆಗುವಂತೆ ಲಂಬಿಸಿದರೆ, P′ ಬಿಂದುವೂ ಮಹೀಲತೆಯ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ. θ ಕೋನವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದಂತೆಲ್ಲ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.



ಆಕೃತಿ 16-19

ಈ ಜಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ಒಂದು ಯಾಂತ್ರಿಕ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಹೇಗೆಂದರೆ, PP′ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು, $2a$ ಉದ್ದದ ಒಂದು ಅನಮ್ಯವಾದ ದಂಡವೆಂದು (rigid rod) ಭಾವಿಸೋಣ. ದಂಡವು ಸದಾ ಮೂಲಬಿಂದುಗತವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ, ದಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು (Q) ಆಕೃತಿ 16–19 ರ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಂತೆಯೂ ಒಂದು ಯಂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ ದಂಡದ ಕೊನೆಗಳು ಮಹೀಲತೆಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ. ದಂಡದ ಒಂದು ಕೊನೆಯಿಂದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ಒಂದು ಕಾಲುವೆಯನ್ನು ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಈ ಯಂತ್ರ ರಚನೆಯು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) $a>b$ ಆದಾಗ ಈ ರೇಖೆಯು ಆಕೃತಿ 16–19 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ.

$a=b$ ಆದಾಗ, ದತ್ತಸಮೀಕರಣವು

$$r = a\,(1 + \text{ಕಾಸ್}\,\theta)$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೃದ್ವಲಯ (cardioid) ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ; ಆಕೃತಿ 8–5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಇದು ಹೃದಯದ ಆಕಾರ

ದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕುಸಬಿಂದು (cusp). ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯು $\theta = \pm\pi/3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಆದಿರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರ ದಲ್ಲೂ, $\theta = 2\pi/3$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಆದಿರೇಖೆಗೆ ಲಂಬದಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ.

$a<b$ ಆದಾಗ, ಮಹೀಲತೆಯು ಆಕೃತಿ 8–7 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರು ವಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ. ಆಗ ಮೂಲಬಿಂದುವು ಕಂಠಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ (node).

(iii) ಮಹೀಲತೆಯೆಂದರೆ ಮಣ್ಣುಹುಳು (earth-worm) ಎಂದರ್ಥ. ಈ ರೇಖೆಯು ಮಣ್ಣು ಹುಳುವಿನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವುದ ರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಈ ಹೆಸರು ಬಂದಿದೆ. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾತನು ಪಾಸ್ಕಲ್ (Pascal).

(iv) **ತ್ರಿಭಾಗಿನೀ (trisectrix)**

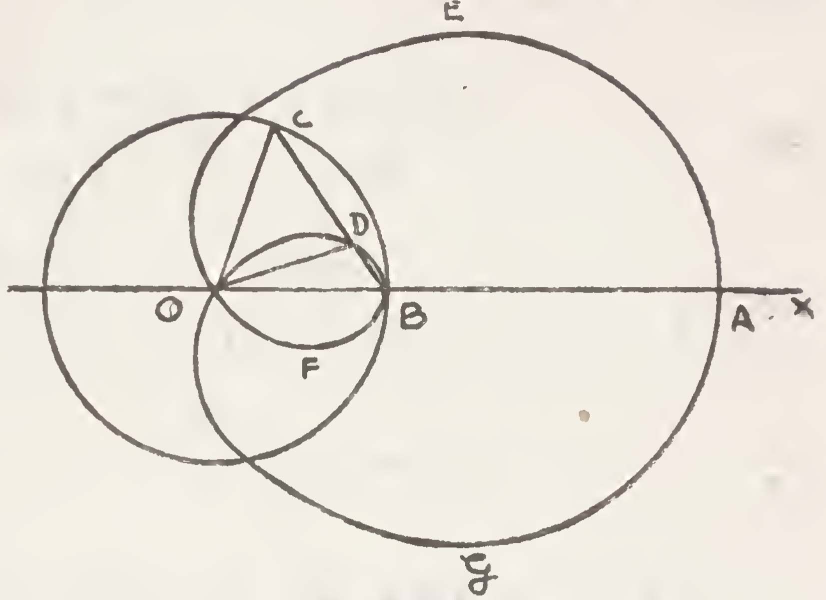
$$r = 1 + 2 \text{ ಕಾಸ್}\theta.$$

ಈ ರೇಖೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ದತ್ತ ಕೋನವನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, ಈ ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭಾಗಿನೀ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ದತ್ತ ಕೋನದ ಪ್ರಮಾಣವು ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿದ್ದರೂ, ಅದನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸರಳದಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕಗಳಾದರೆ (ruler and compasses) ಸಾಕು. ಆದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಭಾಜಕ ರೇಖೆಗಳ ನ್ನೆಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸರಳದಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕಗಳು ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ; ಅದಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ರೇಖೆಯ ಸಹಾಯವು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ತ್ರಿಭಾಗಿನೀ ರೇಖೆಯಿಂದ ಇದು ಹೇಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

ಈ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ $0° \leq \theta \leq 120°$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು AEO ಎಂಬ ಭಾಗಕ್ಕೂ, $120° \leq \theta \leq 180°$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು OFB ಎಂಬ ಭಾಗಕ್ಕೂ, $180° \leq \theta \leq 240°$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು BDO ಎಂಬ

ಭಾಗಕ್ಕೂ, $240 \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$ ಎಂಬ ಅವಧಿಯು OGA ಎಂಬ ಭಾಗಕ್ಕೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿವೆ. $\theta = 180^\circ$ ಆದಾಗ, $r = -1$; $\therefore$ OB $= |r| = 1$.

ಈಗ O ಬಿಂದುವು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಯೂ, OB ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿಯೂ ಉಳ್ಳ ವರ್ತುಳವು ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ. ಈ ವರ್ತುಳದಲ್ಲಿ OC ಎಂಬ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನೆಳೆದು, $\angle$BOC ಎಂಬ ಕೋನವನ್ನು ದತ್ತ ಕೋನವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ, ಮತ್ತು



ಆಕೃತಿ 16-20

ಈ ಕೋನವನ್ನು α ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. BC ಎಂಬ ಛೇದಕವು ತ್ರಿಭಾಗಿನೀ ರೇಖೆಯನ್ನು D ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ $\angle$BOD ಎಂಬ ಕೋನವು $\alpha/3$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೇಗೆಂದರೆ, $\angle \text{BOD} = \theta'$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ D ಬಿಂದುವಿನ ದಿಕ್ ಕೋನವು $180^\circ + \theta'$.

$$\therefore \text{OD} = |r| = |1 + 2 \text{ ಕಾಸ್ } (180^\circ + \theta')|$$

$$= 2 \text{ ಕಾಸ್ } \theta' - 1.$$

ಈಗ BOD ಎಂಬ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ

$$\text{BD}^2 = \text{OB}^2 + \text{OD}^2 - 2 \cdot \text{OB} \cdot \text{OD} \text{ ಕಾಸ್ } \theta'$$

$$= 1 + (2 \text{ ಕಾಸ್ } \theta' - 1)^2 - 2(2 \text{ ಕಾಸ್ } \theta' - 1) \text{ ಕಾಸ್ } \theta'$$

$$= 4 \text{ ಸೈನ್}^2 \frac{\theta'}{2}$$

$\therefore$ $$BD = 2 \text{ ಸೈನ್} \frac{\theta'}{2}.$$

ಅಲ್ಲದೆ, $OB = OC$. $\therefore$ $\angle OBD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

ಈಗ $$\frac{\text{ಸೈನ್ } BOD}{BD} = \frac{\text{ಸೈನ್ } OBD}{OD};$$

ಎಂದರೆ, $$\frac{\text{ಸೈನ್ } \theta'}{2 \text{ ಸೈನ್} (\theta'/2)} = \frac{\text{ಕಾಸ್} (\alpha/2)}{2 \text{ ಕಾಸ್ } \theta' - 1}.$$

$\therefore$ $$\text{ಕಾಸ್} \frac{\alpha}{2} = \text{ಕಾಸ್} \frac{3\theta'}{2}; \quad \therefore \theta' = \alpha/3.$$

(11) ದ್ವಿಪದ್ಮಯ (lemniscate)

$$r^2 = a^2 \text{ ಕಾಸ್ } 2\theta$$

ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಉದಾ 7, § 8·2 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ (ಆಕೃತಿ 8–8). ಈ ರೇಖೆಯು ಬರ್ನೂಲಿ (Bernoulli) ಎಂಬಾತನಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲ್ಪಟ್ಟಿತು.

(12) ಪದ್ಮದಳರೇಖೆ (rhodonae)

$$r = a \text{ ಸೈನ್ } n\theta, \ (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

ಈ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಉದಾ. 8, § 8·2 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ (ಆಕೃತಿ 8–9, 8–10).

(13) ಸಮಾನಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮಿ (equi-angular spiral)

$$r = ae^{\theta \text{ ಕಾಟ್ } \alpha}$$

ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಉದಾ. 9, § 8·2 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ (ಆಕೃತಿ 8–11).

(14) **ವರ್ತುಳದ ವಿಕಾಸಜನ್ಯ ರೇಖೆ (involute of a circle)**

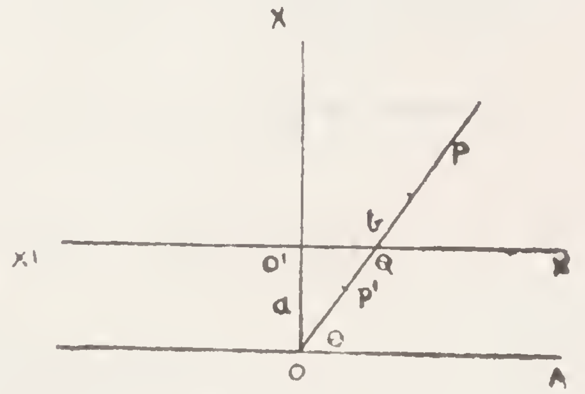
$$\theta = \frac{\sqrt{(r^2 - a^2)}}{a} - \text{ಕಾಸ್}^{-1}\frac{a}{r}.$$

ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಉದಾ. 6, § 12·6 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದೆ.

(15) **ಪಾಂಚಜನ್ಯ ಅಥವಾ ಶಂಖರೇಖೆ (conchoid)**

$$r = a \text{ ಕೋಸೆಕ್}\theta \pm b.$$

(i) ಈ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜಾಮಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನನುಸರಿಸಬಹುದು. OA ಎಂಬ ಮೂಲರೇಖೆಗೆ $OO' = a$ ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿ X′O′X ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆಯಲ್ಪಡಲಿ (ಆಕೃತಿ 16–21). OA ಗೆ θ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಎಳೆಯಲ್ಪಟ್ಟ OQ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು O′X ರೇಖೆಯನ್ನು Q ಎಂಬಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. OQ ರೇಖೆಯಮೇಲೆ P, P′ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು $QP = P'Q = b$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ P, P′ ಬಿಂದುಗಳು ಪಾಂಚಜನ್ಯ ರೇಖೆಯಮೇಲಿರುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, P ಬಿಂದುವು (r, θ) ಆದರೆ, ಆಗ



ಆಕೃತಿ 16–21

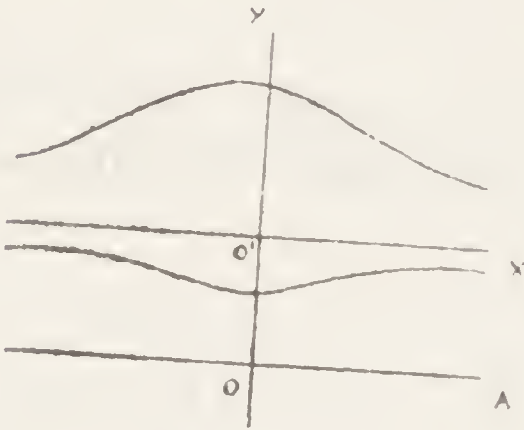
$$r = OP = OQ + QP = a \text{ ಕೋಸೆಕ್}\theta + b.$$

ಮತ್ತು P′ ಬಿಂದುವು (r', θ) ಆದರೆ, ಆಗ

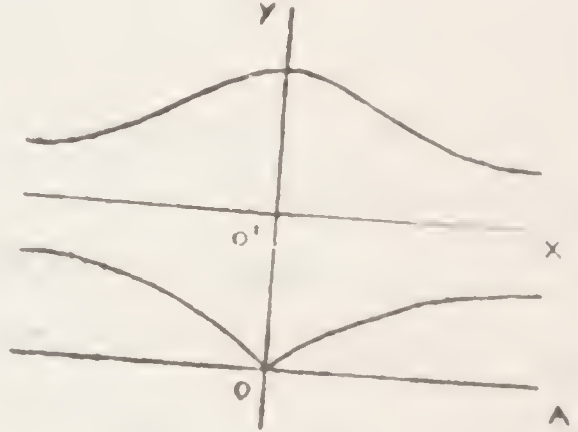
$$r' = a \text{ ಕೋಸೆಕ್}\theta - b.$$

(ii) ಒಂದು ಅನಮ್ಯ ಸರಳದಂಡವು (rigid rod) ಸದಾ O ಬಿಂದುವಿನ ಮುಖಾಂತರ ಸಾರುವಂತೆಯೂ, ದಂಡದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವು X′OX ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಂತೆಯೂ ಒಂದು ಯಂತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಆ ದಂಡದ ಮೇಲಿನ ಇನ್ನೊಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವು ಪಾಂಚಜನ್ಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ.

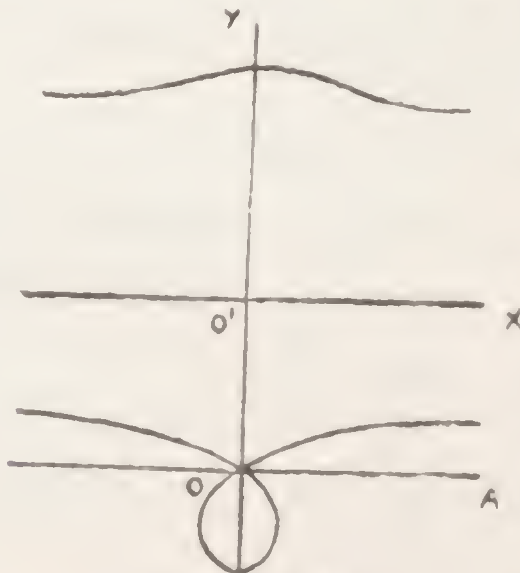
(iii) O′X, O′Y ರೇಖೆಗಳನ್ನು $x-$ ಮತ್ತು $y-$ಅಕ್ಷಗಳನ್ನಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, P ಬಿಂದುವನ್ನು (x, y) ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ



ಆಕೃತಿ 16-22



ಆಕೃತಿ 16-23



ಆಕೃತಿ 16-24

$x = a$ ಕಾಟ್$\theta + b$ ಕಾಸ್θ, ಮತ್ತು $y = b$ ಸೈನ್θ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ θವನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ,

$$x^2y^2 = (a+y)^2(b^2-y^2)$$

ಎಂಬ ಕಾರ್ಟೀಸಿಯಸ್ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ b ಗೆ ಬದಲು $(-b)$ ಹಾಕಿದರೆ ಸಮೀಕರಣವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು P′ ಬಿಂದುವಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ.

$a>b$. $a=b$, ಮತ್ತು $a<b$ ಆದಾಗ ಈ ರೇಖೆಯ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಕೃತಿ 16–22, 16–23 ಮತ್ತು 16–24 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

(iv) ತ್ರಿಭಾಗಿನೀ ರೇಖೆಯಂತೆ ಈ ರೇಖೆಯೂ ದತ್ತ ಕೋನವನ್ನು ತ್ರಿಭಾಗಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಉಪಯೋಗವಾಗುತ್ತದೆ.

(v) ಶಂಖದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಈ ರೇಖೆಗೆ ಶಾಂಖಜನ್ಯವೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾತನು ನಿಕೋಮಿಡೀಸ್ (Nichomedes).

ಅಭ್ಯಾಸ 16

1. $$y^2 = (x-3)^2(x-2)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸುಷಿರವಿದೆ (loop) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ; ಮತ್ತು ಇಡೀ ರೇಖೆಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ.

2. $$y^2(1-y) = x^2$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

3. $$y^2 = x^2(x-1)(2-x)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ಒಂದು ಆವರಣ ರೇಖೆ (closed curve) ಎಂದು ತೋರಿಸಿ; ಮತ್ತು ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

4. $$y^2 = x^2(4 - x^2)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಸುಷಿರಗಳಿಂದ (loops) ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ; ಮತ್ತು ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

5. $$xy^2 = 1 - x$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ y – ಅಕ್ಷವು ಅಸಂಪಾತಿಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ, ಮತ್ತು ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು (inflexions) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ರೇಖೆಯ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ.

6. $$x^2y^2 = a^2(y^2 - x^2)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಮತ್ತು ರೇಖೆಯನ್ನನುಸರಿಸಿ.

7. $$y(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಸುಷಿರವೂ (loop), ಒಂದು ಅಸಂಪಾತಿಯೂ ಇವೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

8. $$y = \frac{\text{ಲಾಗ್}\, x}{x}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನೂ, ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದುವನ್ನೂ, ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದುವನ್ನೂ (inflexion) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

9. $$r = a \text{ ಕಾಟ್ } \theta$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನೂ ಪ್ರತಿವಲನಬಿಂದುವನ್ನೂ (inflexion) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ರೇಖೆಯು $(\pi/2) < \theta < \pi$ ಆದಾಗ 4ನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲೂ (quadrant), $(3\pi/2) < \theta < 2\pi$ ಆದಾಗ 2ನೆಯ ಚೌಭಾಗದಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ರೇಖೆಯನ್ನನುಸರಿಸಿ.

10. $x^2+y^2=a^2$ ಎಂಬ ವರ್ತುಳದ ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು (secant) x – ಅಕ್ಷದಮೇಲೆ ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ (project), ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣವು ವರ್ತುಳದ ತ್ರಿಜ್ಯದಷ್ಟೇ ಇದ್ದರೆ, ಛೇದಕದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಪಥವು

$$4r^2\text{ಸೈನ್}^2\theta=a^2\ (4\ \text{ಸೈನ್}^2\theta-1)$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಈ ರೇಖೆಯು ಎರಡು ಸುಷಿರಗಳಿಂದ (loops) ಆಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.

11. $$2r^2=\text{ಟ್ಯಾನ್}\,2\theta$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯ ಅಸಂಪಾತಿಗಳನ್ನೂ, ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ರೇಖೆಯನ್ನನುಸರಿಸಿ.

12. $$r=\frac{a}{1-\text{ಸೈನ್}\,2\theta}$$

ಎಂಬ ರೇಖೆಯು $\theta=\pm\pi/4$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಸಮಸಂಗತವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತೋರಿಸಿ. ಅಸಂಪಾತಿಯನ್ನೂ, r ನ ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯವನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ರೇಖೆಯನ್ನೆಳೆಯಿರಿ.



ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1

3. $41/29\sqrt{2}$.

8. $y = \dfrac{-h \pm \sqrt{(h^2 - ab)}}{b} x$.

10. i) $\dfrac{9}{x-3} - \dfrac{7}{x-2}$;

ii) $\dfrac{4}{3(x-2)} - \dfrac{11}{6(x+1)} + \dfrac{11}{2(x+3)}$;

iii) $1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+1}$;

iv) $\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$;

v) $\dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$;

vi) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}$.

11. i) 3/2 ; ii) 1 ; iii) ∞ ;
iv) 3 ; v) 2 ; vi) 2 ;
vii) -1 ; viii) 2 ; ix) 1 ;
x) 1 ; xi) 1 ; xii) $1/x$.

12. $(\pi/4,\ 1/\sqrt{2})$.

13. i) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ; ii) $x=1$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿ;
iii) $x=1, 2, 3, \ldots$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (A)

1. i) $8x-3$; ii) $-1/x^2$; iii) $-1/(x+2)^2$.

2. i) $6x^2-8x+3$;

ii) $2x-1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$;

iii) $75x^4+15x^2-6x$;

iv) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$;

v) $10x^4+40x^3-3x^2-10x-3$;

vi) $2(-x^2+x+1)/(x^2+1)^2$;

vii) $(-3x^2+4x+5)/(x^2+x+1)^2$;

viii) $(-2x+7)/[2(x^2-x+1)^{3/2}]$;

ix) $5(x^2+3x+1)^4(2x+3)$.

x) $(2ax+b)/[2\sqrt{(ax^2+bx+c)}]$;

xi) $-x/(x^2+1)^{3/2}$;

xiii) $x^{-1/2}(x+2)^{-3}$;

3. 1.

4. ± 1.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (B)

1. i) 2 ಸೆಕ್ $2x$ ಟ್ಯಾನ್ $2x$;

   ii) x ಕಾಸ್ $x +$ ಸೈನ್ x.

2. i) ಕಾಸ್ $x + [1/\sqrt{(1-x^2)}]$;

   ii) ಕಾಸ್ $^2 x -$ ಸೈನ್ $^2 x$;

   iii) $1 + 2x$ ಟ್ಯಾನ್ $^{-1} x$;

   iv) $(x$ ಸೆಕ್ $^2 x -$ ಟ್ಯಾನ್ $x)/x^2$;

   v) m ಕಾಸ್ mx ;

   vi) -2 ಕಾಸ್ x ಸೈನ್ x ;

   vii) $\frac{1}{2}$ ಸೆಕ್ $^2 \frac{1}{2}x$;

   viii) $\frac{1}{2}($ಟ್ಯಾನ್ $x)^{-\frac{1}{2}} \cdot$ ಸೆಕ್ $^2 x$;

   ix) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ಸೆಕ್ $^2 \sqrt{x}$;

   x) $3/[x\sqrt{(x^6-1)}]$;

   xi) $3($ಸೆಕ್ $^{-1} x)^2/[x\sqrt{(x^2-1)}]$;

   xii) $[m$ ಕಾಸ್ $(m$ ಸೈನ್ $^{-1} x)]/\sqrt{(1-x^2)}$;

   xiii) $8x$ ಸೈನ್ $2x^2$ ಕಾಸ್ $2x^2$;

   xiv) $-6x$ ಕಾಟ್ $^2 x^2$ ಕೋಸೆಕ್ $^2 x^2$;

   xv) 4 ಕಾಸ್ $4x$ ಕಾಸ್ $3x - 3$ ಸೈನ್ $3x$ ಸೈನ್ $4x$;

   xvi) $3x^2$ ಕೋಸೆಕ್ $^2 x - 2x^3$ ಕೋಸೆಕ್ $^2 x$ ಕಾಟ್ x ;

   xvii) $-x^{-2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}$ ಸೈನ್ $^{-1} x^{-1}$;

   xviii) $-1/[(x+1)\sqrt{x}]$;

xix) $\dfrac{x \text{ ಸೆಕ್}^2(x/a) + a\text{ಟ್ಯಾನ್}(x/a)}{a^2 + x^2 \text{ ಟ್ಯಾನ್}^2(x/a)}$;

xx) $[\text{ಸೈನ್}^{-1}x + x\sqrt{(1-x^2)}]/(1-x^2)^{3/2}$.

3. $2/(1+x^2)$.

4. $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$.

8. ± 1.

9. $x = n\pi, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$

10. $x = (2n+1)\pi/2, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (C)

1. i) $e^{ax}[a \text{ ಸೈನ್}(bx+c) + b \text{ ಕಾಸ್}(bx+c)]$;

ii) $\text{ಕಾಸ್}x \text{ ಸೈನ್ಎಚ್}x - \text{ಸೈನ್}x \text{ ಕಾಸ್ಎಚ್}x$;

iii) $\left(e^{\text{ಸೈನ್}^{-1}x}\right)/\sqrt{(1-x^2)}$;

iv) $e^{x \text{ ಟ್ಯಾನ್}^{-1}x}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}x\right)$;

v) $-\text{ಟ್ಯಾನ್}x$;

vi) $x^{-1} \text{ ಕಾಸ್ಲಾಗ್}x$;

vii) $(\text{ಕಾಟ್}x)/\text{ಲಾಗ್ಸೈನ್}x$;

viii) $\dfrac{[(\text{ಲಾಗ್}_e x)(\text{ಕಾಟ್}x) - \frac{1}{x}\text{ಲಾಗ್}_e\text{ಸೈನ್}x]}{(\text{ಲಾಗ್}_e x)^2}$;

ix) $1/[(\text{ಲಾಗ್}_e 2)(\text{ಸೈನ್}x)(\text{ಕಾಸ್}x)]$;

x) $(\text{ಲಾಗ್}_e 100)100^x$;

xi) $\frac{\pi}{180}\text{ಲಾಗ್}_e 10 \cdot \text{ಸೆಕ್}\frac{\pi x}{180}\text{ಟ್ಯಾನ್}\frac{\pi x}{180} \cdot 10^{\text{ಸೆಕ್}\,\pi x/180}$

xii) $\frac{\text{ಲಾಗ್}_e 2}{\sqrt{(1+x^2)}} \cdot 2^{\text{ಸೈನ್ ಎಚ್}^{-1}x}$;

xiii) $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x[1+(\text{ಲಾಗ್}\,x)^2]}$;

xiv) $[x+(1+x^2)\text{ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್}^{-1}x]/(1-x^2)^2$;

xv) 1;

xvi) $\frac{1-\text{ಲಾಗ್ ಟ್ಯಾನ್}\,x}{\text{ಸೈನ್}^2 x} \cdot (\text{ಟ್ಯಾನ್}\,x)^{\text{ಕಾಟ್}\,x}$;

2. 1;

3. 1;

4. 1; 1.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (D)

1. i) $-(b/a)\,\text{ಕಾಟ್}\,\theta$; ii) $-1/t^2$.

3. $(\text{ಕಾಸ್}\,x)(\text{ಸೆಕ್ ಎಚ್}\,x)$.

4. $(x\,\text{ಕಾಟ್}\,x)/\text{ಕಾಸ್ ಲಾಗ್}\,x$.

5. i) $-x/y$; ii) $(3-x)/(4+y)$;

iii) $\frac{\text{ಲಾಗ್ ಕಾಸ್}\,y - y\,\text{ಕಾಟ್}\,x}{\text{ಲಾಗ್ ಸೈನ್}\,x + x\,\text{ಟ್ಯಾನ್}\,y}$

6. $-2\sqrt{3}/9$.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

1. $1/(a+b$ ಕಾಸ್ $x)$.

2. $r/\sqrt{(a^2-r^2)}$.

3. $(x$ ಟ್ಯಾನ್ ಎಚ್ $x)/$ಸೈನ್ ಎಚ್ ಲಾಗ್ x.

4. 2.

5. $1+[e^x(1+x)(1+x^2)/(1+x^2e^{2x})]$.

6. (b/a) ಕೋಸೆಕ್ θ ; (b/a) ಕಾಟ್ ಎಚ್ θ.

7. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

8. i) $\frac{(m+n)(x+y)^{m+n-1}-my^nx^{m-1}}{nx^my^{n-1}-(m+n)(x+y)^{m+n-1}}$

ii) $(x-y)/[x($ಲಾಗ್ $x-1)]$

iii) $\frac{(\text{ಕಾಸ್ } x \cdot \text{ಸೈನ್ } x \cdot \text{ಲಾಗ್ ಕಾಟ್ } y - y)\text{ಕಾಸ್ } y \cdot \text{ಸೈನ್ } y}{(\text{ಕಾಸ್ } y \text{ ಸೈನ್ } y \text{ ಲಾಗ್ ಟ್ಯಾನ್ } x + x)\text{ಕಾಸ್ } x \cdot \text{ಸೈನ್ } x}$

9. i) $y^2/[x(1-y$ ಲಾಗ್ $x)]$;

ii) $1/(2y-1)$;

iii) $y/(2y-x)$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3

7. i) $(-1)^n \cdot n!\left[\frac{-2}{(x-1)^{n+1}}+\frac{3}{(x-2)^{n+1}}\right]$;

ii) $(-1)^n \cdot n!\left[\dfrac{-2}{(x-1)^{n+1}} + \dfrac{5}{(x-2)^{n+1}}\right]$;

iii) $\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^n} - \dfrac{1}{(x-1)^n}\right]$;

iv) $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot a^n/(ax+b)^n$;

v) $\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{2}\left[\dfrac{2^n}{(2x+3)^n} - \dfrac{3^n}{(3x+2)^n}\right]$;

vi) $\frac{3}{4}\text{ಸೈನ್}\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right) - \dfrac{3^n}{4}\text{ಸೈನ್}\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

vii) $\frac{1}{2}\left[\text{ಕಾಸ್}\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right) - 5^n\text{ಕಾಸ್}\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$;

viii) $\frac{1}{2}\cdot 5^n[e^{4x}\text{ಕಾಸ್}(3x + n\,\text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\,\frac{3}{4})$
$+ e^{-4x}\text{ಕಾಸ್}(3x - n\,\text{ಟ್ಯಾನ್}^{-1}\,\frac{3}{4})]$;

ix) $y_1 = x(1+\text{ಕಾಸ್}\,2x) - x^2\text{ಸೈನ್}\,2x$;
$y_2 = 1 + (1-2x^2)\text{ಕಾಸ್}\,2x - 4x\,\text{ಸೈನ್}\,2x$;

$$y_n = \tfrac{1}{2}\left[x^2\cdot 2^n\,\text{ಕಾಸ್}\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right.$$
$$+ n\cdot 2x\cdot 2^{n-1}\,\text{ಕಾಸ್}\left(2x+\overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\left. + n(n-1)2^{n-2}\,\text{ಕಾಸ್}\left(2x+\overline{n-2}\frac{\pi}{2}\right)\right],$$
$(n \geq 3)$;

x) $3^{n-3} \cdot e^{3x}[27x^3 + 27nx^2 + 9n(n-1)x + n(n-1)(n-2)]$;

9. $P = x^3 - 168x$; $Q = 336 - 24x^2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4

1. $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $f'(0)$ ಇಲ್ಲ.

3. $f(a) \neq f(b)$.

4. $x = 3/2$.

5. $x = \pm 1/\sqrt{3}$.

6. $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. (i) 3/2 ; (ii) 1/2 ; (iii) 2 ; (iv) 1 ; (v) 1/3; (vi) $n(n+1/2$; (vii) 1/30 : (viii) 0 ; (ix) 2 ; (x) 1 ; (xi) $e^{2/a}$; (xii) $e^{-1/2}$.

10. $1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

11. i) $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$,

ii) ಲಾಗ್ $2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96}$.

12. $-1/12$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5

12. $-3/2$.

14. 0.

ಅಭ್ಯಾಸ 6

1. $80\frac{8}{9}$ ಅಡಿ.

3. $\sqrt{2}$ ಅಡಿ/ಸೆ.

4. 5/12 ಅಂ./ನಿ.

5. 0·32 ಚ.ಅಂ./ನಿ.

6. 37·5 ಚ.ಅಂ./ಸೆ. ; 11 ಅಂ./ಸೆ.

7. 3/5 ಘ.ಸೆಂ.ವಿಾ,/ನಿ. ; $1\frac{1}{5}$ ಚ.ಸೆಂ.ವಿಾ./ನಿ.

8. 10ಚ.ಅಂ./ನಿ.

9. 840 ಘ.ಅಂ./ವಿಾ ; 528 ಚ.ಅಂ./ವಿಾ.

10. $1\frac{17}{60}$ ಘ.ಅಂ./ಸೆ.

11. 1/4 ಅಂ./ಸೆ.

12. 2/3 ಸೆಂ.ವಿಾ./ನಿ. ; 44 ಚ.ಸೆಂ.ವಿಾ/ನಿ.

13. 1/9 ಅಂ./ಸೆ.

14. 1/25 ಅಂ./ನಿ. ; 1/21 ಅಂ./ನಿ.

15. $3x\%$.

16. xc ಕಾಟ್ $c\%$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7

1. $5x-y-7=0$; $x+5y-17=0$.

2. $(0, 0)$, $y=\pm x$; $(1, 0)$, $x=1$; $\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

3. $x + t^2 y = 2ct$; $t^3 x - ty = c(t^4 - 1)$.

4. $\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, \ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. (i) $(0, 0)$, $\left(2^{\frac{1}{3}}a, \ 2^{\frac{2}{3}}a\right)$; (ii) $\left(\frac{3a}{2}, \ \frac{3a}{2}\right)$.

7. $\left(\frac{4a}{9}, \ \pm \frac{8a}{27}\right)$.

10. $\frac{x}{\text{ಕಾಸ್}^2\theta} + \frac{y}{\text{ಸೈನ್}^2\theta} = a$.

15. -1.

18. $2a$ ಸೈನ್$^3(\theta/2)$.

20. $(0, 0)$, $45°$; $(1, 1)$, ಟ್ಯಾನ್$^{-1}(1/5)$.

29. c ಕಾಷ್(x/c) · ಕಾಟ್ಎಚ್(x/c).

34. —2.

ಅಭ್ಯಾಸ 8

14. ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ : r ಸೈನ್$\theta = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$;

ಲಂಬರೇಖೆ : r ಕಾಸ್$\theta = 3a/4$.

15. i) $\theta = \pm 60°$; ii) $\theta = 0, \ \pm 120°$.

19. $\sqrt{(a^2 - r^2)}$: $r^2/\sqrt{(a^2 - r^2)}$; a^2.

ಅಭ್ಯಾಸ 9

1. i) $x(x^2 + y^2) + ay^2 = 0$ ಎಂಬ ಅಭಿಗಮರೇಖೆ (cissoid).

ii) $r^2 = a^2$ ಕಾಸ್$^2\theta + b^2$ ಸೈನ್$^2\theta$.

iii) $r = \pm a$ ಸೈನ್θ ಕಾಸ್θ.

2. r ಕಾಸ್ $\theta = a$.

8. r^2 ಕಾಸ್ $2\theta = c^2$.

9. ಹೃದ್ವಲಯ (cardioid).

10. $a^2x^2 + b^2y^2 = k^4$.

11. $r^{2/3}$ ಕಾಸ್ $\frac{2}{3}\theta = b^{2/3}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 10

1. i) $(1, 4)$ ಗ, $(5, -28)$ಕ;

ii) $(-1, 15)$ ಗ, $(3, -17)$ ಕ;

iii) $(-12, 0)$ ಗ, $(5, -5913)$ ಕ;

iv) $(-2, 3)$ ಗ, $(\frac{1}{2}, -\frac{113}{4})$ ಕ;

v) $\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ಗ; $\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ಕ;

vi) $(1, \frac{1}{2})$ ಗ, $(-1, -\frac{1}{2})$ ಕ;

vii) $(4, 1)$ ಗ, $(16, 25)$ ಕ;

viii) $(2, -9)$ ಗ, $(-2, -\frac{1}{9})$ ಕ;

ix) $\left[(4n-3)\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right]$ಗ, $\left[(4n-1)\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ ಕ;

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

x) $\left(\text{ಸೈನ್}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ಗ, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ಕ;

xi) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}\right)$ಗ;

xii) $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ ಗ.

2. $-\infty < x < -1$ ಮತ್ತು $x > 2$ ಆರೋಹಿ; $-1 < x < 2$ ಅವರೋಹಿ ; 3 ಗ, -24 ಕ.

13. 6 ಅಂ ; 4608 ಘ.ಅಂ.

16. (i) $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$; (ii) $R\sqrt{2}$.

17. ಸೈನ್$^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$; $4R/3$.

22. (i) (0, 0, 1) ಗ ; (ii) $(2, \frac{1}{2}, -2)$ ಕ.

ಅಭ್ಯಾಸ 11

1. i) $x=1, x=7$; ii) $x=0$;
iii) $x=0, x=\pm\sqrt{3}$ iv) $(2, -1)$;
v) $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$;
vi) $x=-2$; vii) $x=0$.

8. (i) $x>5/3$; (ii) $x<5/3$.

10. $\theta=1/2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 12

1. $\frac{-6}{\sqrt{125}}$; $+\frac{\sqrt{125}}{6}$.

2. $\frac{80}{29^{3/2}}$; $(\frac{3}{16}, \frac{60}{40})$.

3. 0.471.

4. i) $2a$; ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

iii) $\frac{3\sqrt{2}}{16}a$; iv) $2\sqrt{2}$;

v) $-4a$ ಸೈನ್$(\theta/2)$; vi) $3a$ ಕಾಸ್$t\cdot$ಸೈನ್t.

5. $\frac{\sqrt{2}}{24}$; $12\sqrt{2}$; $(-7, 14)$.

17. (i) $4r/3$; (ii) $2r$.

ಅಭ್ಯಾಸ 13

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. $y=\pm a$.

3. $x=0$.

4. $y=0$.

5. $x^2-y^2=c^2$.

6. $4xy=c^2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 14

1. i) $x-y+2=0$, $x+y+1=0$, $y=0$.
   ii) $2x-y+3=0$, $x+y-1=0$, $y=2$.
   iii) $y=0$, $y=x$, $y=x-1$.
   iv) $y=0$, $y=-x\pm 1$.
   v) $y=0$, $y=x\pm\sqrt{2}$.
   vi) $x=\pm a$.
   vii) $x+a$, $x=b$.
   viii) $x=2a$.

ix) $x+y+a=0.$

x) $x=\pm a,\ y=\pm b.$

xi) $x\pm y=\pm\sqrt{2},\ x=\pm 1,\ y=\pm 1.$

xii) $y=2x-14,\quad y=3x+13,\quad y=x+1,$
$y=x+2.$

2. $x\pm y\pm 1=0$; 2 ಚ. ಮಾನಗಳು.

4. $x=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

5. i) $x+2y-1=0,\ x+y=0.\ x-y=0;$
ii) $3x-4y+1=0.$

6. i) $x+y=0,\ x-y=0,\ x+2y=0,$
$x-2y=0;$
ii) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

7. i) $y=\pm\sqrt{2}\cdot x,\ \ y=\pm\sqrt{3}\cdot x;$
ii) $xy=4.$

8. i) $x-y=0,\ x+y=0,\ x+2y+1=0,$
$x-2y+1=0;$
ii) $x^2+y^2=1.$

9. $y=\pm 1$; $y=1$ ನ್ನು ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ. $y=-1$ ನ್ನು ಮೇಲುಗಡೆಯಿಂದ.

10. $y=\pm x,\ \ x=\pm 1$; 1 ನೆಯ ಚಾಭಾಗದಲ್ಲಿ $y=x$ ನ್ನು ಕೆಳಗಡೆಯಿಂದ ಮತ್ತು $x=1$ನ್ನು ಎಡಗಡೆಯಿಂದ. 1 ನೆಯ ಚಾಭಾಗದ ರೇಖೆಯನ್ನು OX, OY ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸಿದರೆ, ಉಳಿದ ರೇಖೆ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

11. (i) r ಸೈನ್$^{\prime}\theta=a$; (ii) r ಕಾಸ್$^{\prime}\theta=a.$

12. (i) $r=1$; (ii) $r=a.$

ಅಭ್ಯಾಸ 15

1. $y = \pm x$; $(x-2)^2 + (y \pm 2)^2 = 8$.

2. $y = 0$.

4. $x = 0$, $y = 0$.

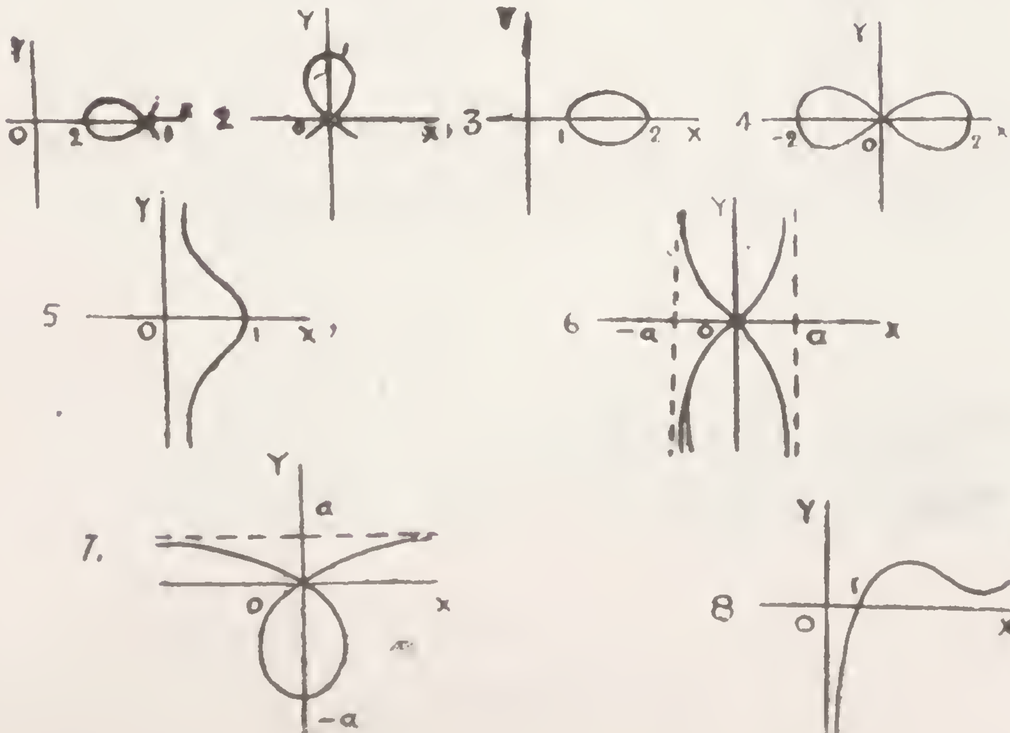
9. $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$.

10. i) $(1, 2)$ ಕಂಠ ಬಿಂದು ; ii) $(1, 2)$ ಕಂಠ ಬಿಂದು ;
iii) $(0, 0)$ ಕುಶ ಬಿಂದು ; iv) $(2, 3)$ ಅನುಬದ್ಧ ಬಿಂದು.

11. i) $y = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot x$; ii) $y = 0$, $y = \pm\sqrt{3}\cdot x$.

12. i) ಕಂಠ ಬಿಂದು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು $\theta = \pm\pi/4$;
ii) ಕುಶ ಬಿಂದು, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ $\theta = 0$;
iii) $(2n-1)$ ಶಾಖೆಗಳುಳ್ಳ ಗುಣ ಬಿಂದು ;
iv) $2n$ ಶಾಖೆಗಳುಳ್ಳ ಗುಣ ಬಿಂದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 16



5. $\left(\frac{3}{4},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

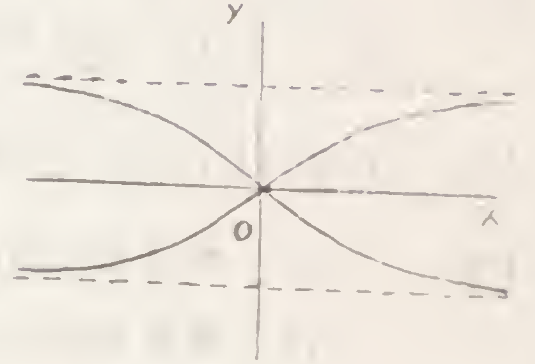
6. $x = \pm a$;

8. ಅಸಂಪಾತಿಗಳು : $x=0,\ y=0$;

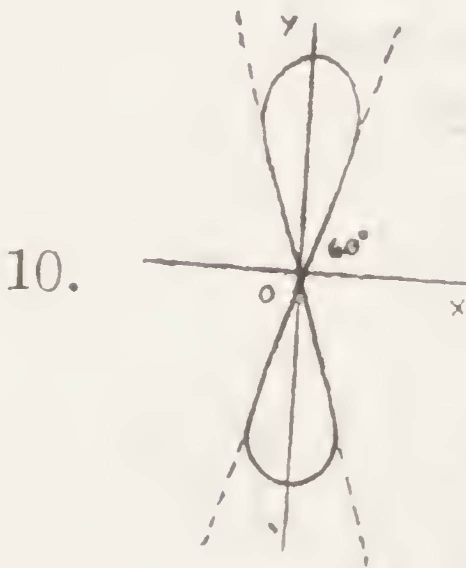
ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು : $\left(e,\ \frac{1}{e}\right)$;

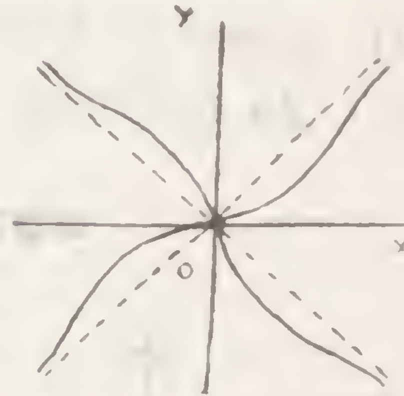
ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು: $\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$;

9. ಅಸಂಪಾತಿಗಳು: r ಸೈನ್ $\theta = \pm a$;
ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು : ಧ್ರುವ.



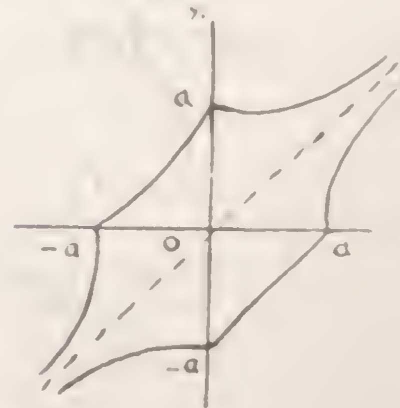
10.





11. ಅಸಂಪಾತಿಗಳು : $y = \pm x$;
$x^4 - y^4 = xy$.

12. ಅಸಂಪಾತಿ : $\theta = \pi/4$;
(ಕನಿಷ್ಠ r) $= a/2$.



ಗಣಿತ ಶಬ್ದಕೋಶ

(ಇಂಗ್ಲಿಷ್ - ಕನ್ನಡ)

[Mathematical glossary (English-Kannada)]

ab initio = ಪ್ರಭವದಿಂದ (from first principles);
ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ (from the definition).

abscissa = ಕೋಟಿ; x – ನಿರ್ದೇಶಕ; ಅಪಚ್ಛೇದ
(ab = from, across, scindere = to cut)

absolute = ಶುದ್ಧ.

absurd = ಅಸಂಗತ; ಅಸಂಬದ್ಧ.

acceleration = ತ್ವರ್ಯಕ.

accumulation = ಶೇಖರಣ.

—point of accumulation = ಶೇಖರಣ ಬಿಂದು.

acute = ಲಘು; ಸಮನ್ಯೂನ; ಸಂಕುಚಿತ; ಅವಿಶಾಲ.

add = ಸಂಕಲಿಸು; ಕೂಡು.

—addition = ಸಂಕಲನ.

—additional = ಉಪ; ಅಧಿಕ.

ad inf. [ad infinitum (Latin)] = ಅನಂತಾವಧಿ; ಅನಂತವಾಗಿ

adjacent = ಸಂಲಗ್ನ.

aggregate = ಸಮುದಾಯ.

algebra = ಬೀಜಗಣಿತ.

—algebraic geometry = ಬೀಜ ರೇಖಾಗಣಿತ.

alike = ಸದೃಶ.

alternate = ಪದಾಂತರ; ಏಕಾಂತರ.

alternative = ವಿಕಲ್ಪ.

altitude = ಉನ್ನತಿ ; ಔನ್ನತ್ಯ.
ambiguous = ಸಂದಿಗ್ಧ.
—ambiguity = ಸಂದಿಗ್ಧತೆ.
—ambiguous case = ಸಂದಿಗ್ಧ ಪಕ್ಷ,
amount = ಮೊತ್ತ.
analyse = ವಿಶ್ಲೇಷಿಸು ; ವಿಭಜಿಸು.
—analysis = ವಿಶ್ಲೇಷಣ.
—analytical geometry = ವಿಶ್ಲೇಷ ಜಾಮಿತಿ.
angle = ಕೋನ.
—angular = ಕೋನಿಕ.
answer = ಉತ್ತರ.
antecedent = ಪೂರ್ವಪದ.
anti-clockwise = ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ; ಅಪಸವ್ಯ.
apparent = ಉಪಗೋಚರ ; ಪ್ರತ್ಯಕ್ಷ.
application = ಪ್ರಯೋಗ; ಸಮಾರೋಪ.
—applied mathematics = ಪ್ರಯೋಗ ಗಣಿತ.
appropriate = ಉಚಿತ ; ಸೂಕ್ತ.
approximate = ಉಪಲಕ್ಷ್ಯವಾಗಿ,
—approximation = ಉಪಲಕ್ಷ್ಯ.
area = ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ; ಸಲೆ ; ಚದರಳತೆ ; ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.
arc = ಕಂಸ.
arithmetic = ಅಂಕಗಣಿತ.
arithmetic mean = ಸಮಾನಾಂತರ ಮಧ್ಯಮ.
arithmetic processes = ಅಂಕಗಣಿತ ವಿಧಾನಗಳು.
(ಸಂಕಲನಾದಿ ವಿಧಾನಗಳು)
arithmetic progression = ಸಮಾನಾಂತರ ಪ್ರಗಾಮಿ.
argument = ಸ್ವತಂತ್ರ ವಿಸ್ವಭಾವಿ ; ತರ್ಕವಾದ

arm = ಬಾಹು.
article = ಪರಿಚ್ಛೇದ.
ascending = ಆರೋಹಿಯಾದ ; ವರ್ಧಿಸುವ.
assign = ನೇಮಿಸು ; ನಿರ್ದೇಶಿಸು ; ಕೊಡು ; ಹಂಚು.
astroid = ನಾಕ್ಷತ್ರಿ (astro = ನಕ್ಷತ್ರ.)
asymptote = ಅಸಂಪಾತಿ (ಸಂಪಾತವಾಗದಿರುವುದು)
assume = ಭಾವಿಸು ; ಅಂಗೀಕರಿಸು.
attain = ಹೊಂದು.
auxiliary = ಸಹಾಯಕ.
average = ಸರಾಸರಿ.
axiom = ಆಧಾರ ನಿಯಮ.
axis = ಅಕ್ಷ.

base = ಪೀಠ ; ಪೀಠಾಂಕ ; ಪಾದಾಂಕ ; ಆಧಾರಾಂಕ.
behaviour = ವರ್ತನೆ ; ಚರ್ಯೆ ; ಕಾರ್ಯರೀತಿ.
binomial = ದ್ವಿಪದಿ.
bisect = ಅರ್ಧಿಸು.
—bisection = ಅರ್ಧೀಕರಣ.
—bisector = ಅರ್ಧಕ.
bound = ಬಂಧನ.
—bounded = ಬಂಧಿತ.
—upper bound = ಉದ್ಬಂಧನ.
—lower bound = ಅಧೋ ಬಂಧನ.
brackets = ಆವರಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳು.
branch = ಶಾಖೆ.
breadth = ಅಗಲ.

calcul = ಎಣಿಕೆಗಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕಲ್ಲುಹರಳು.
calculation = ಕಲನ.
calculus = ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ (a mode of calculation)
calender = ತಾರೀಖು ಪಟ್ಟಿ.
cardioid = ಹೃದ್ವಲಯು (ಹೃದಯುದ ಆಕಾರದ ಒಂದು ರೇಖೆ).
cancel = ಪ್ರಹರಿಸು, ಹೊಡೆದು ಹಾಕು.
case = ಪಕ್ಷ.
catenary = ತಂತ್ರೀರೇಖೆ (chainette).
cent = ನೂರು.
centre = ಮಧ್ಯ ಬಿಂದು ; ಕೇಂದ್ರ.
—centre of a circle = ವರ್ತುಳದ ಕೇಂದ್ರ.
—centre of curvature = ಪ್ರವಣತಾ ಕೇಂದ್ರ.
—central = ಮಧ್ಯಮ.
centroid = ಗುರುತ್ವ ಕೇಂದ್ರ.
century = ಶತಮಾನ.
circle = ವರ್ತುಳ ; ವೃತ್ತ.
—circle of curvature = ಪ್ರವಣತಾ ವರ್ತುಳ,
—circular = ವರ್ತುಳೀಯ.
—circum-circle = ಪರಿವೃತ್ತ.
—circum-radius = ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯ.
circumference = ಪರಿಧಿ.
circumscribe = ಆವರಣಿಸು ; ಬಹಿಯೋ೯ಜಿಸು.
cissoid = ಅಭಿಗಮ ರೇಖೆ.
chainette = ತಂತ್ರೀರೇಖೆ (catenary).
change = ಬದಲಾವಣೆ.
chord = ಛೇದಕ ; ಜ್ಯಾ ; ಚಾಪಕರ್ಣ.
—chord of contact = ಸ್ಪರ್ಶ ಛೇದಕ.

—chord of curvature = ಪ್ರವಣತಾ ಛೇದಕ
classification = ವರ್ಗೀಕರಣ.
clear = ಸ್ಪಷ್ಟ.
clockwise = ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ; ಸವ್ಯ.
closed = ಆವೃತ.
—closed interval = ಆವೃತಾವಧಿ.
—closed curve = ಆವರಣರೇಖೆ.
closest contact = ನಿಕಟ ಸ್ಪರ್ಶ.
coefficient = ಸಹವರ್ತನ ; ಗುಣಕ ; ಪೋಷಕ.
cofactor = ಸಹಾಪವರ್ತನ.
coincide = ಐಕ್ಯವಾಗು.
collinear = ಸರಳರೇಖಸ್ಥ.
combination = ಸಂಯೋಗ ; ಸಮುದಾಯ.
commensurable = ಪರಿಮೇಯ.
common—ಸಾಮಾನ್ಯ.
—common difference = ಸಾಮಾನ್ಯಾಂತರ ; ಚಯ (ಭಾಸ್ಕರ).
—common ratio = ಸಾಮಾನ್ಯ ಧಾರಣರಾಶಿ ; ಚಯೋಗುಣ (ಭಾಸ್ಕರ).
—common chord = ಸಾಮಾನ್ಯ ಛೇದಕ.
compare = ಹೋಲಿಸು.
compasses = ವೃತ್ತಕ ; ಕೈವಾರ.
complement = ಪೂರಕ.
complex number = ಭಾವನಾಂಕ ; ಕಲ್ಪನಾಂಕ.
composite = ಮಿಶ್ರ ; ಸಂಯುಕ್ತ.
—composite function = ಮಿಶ್ರಾನುಸ್ಥಾಪನೆ.
compound angle = ಸಂಕಲಿತ ಕೋನ ; ಮಿಶ್ರಕೋನ.

concave = ನಿಮ್ನ.

—concave upwards = ಊರ್ಧ್ವನಿಮ್ನ.

—concave downwards = ಅಧೋನಿಮ್ನ.

—concavity = ನಿಮ್ನತೆ.

concentric circles = ಕೇಂದ್ರೈಕ್ಯ ವೃತ್ತಗಳು.

conchoid = ಪಾಂಚಜನ್ಯ ; ಶಂಖರೇಖೆ.

conclusion = ತೀರ್ಮಾನ ; ಸಿದ್ಧಾಂತ.

concur = ಸಂಗತವಾಗು ; ಸಂಗಮಿಸು.

—concurrence = ಏಕಬಿಂದು ಸಂಗಮ.

—concurrent = ಸಂಗಾಮಿಯಾದ.

concyclic = ಸಂವೃತ್ತ.

condensation = ಘನೀಕರಣ.

condition = ನಿಬಂಧನೆ.

cone = ಶಂಕು.

—conic section = ಶಂಕುಭಾಗಿನಿ.

confusion = ಅವ್ಯವಸ್ಥೆ ; ಪರಿಭ್ರಮಣ.

congruence = ಸರ್ವ ಸಮತ್ವ.

conjugate = ಅನುಬದ್ಧ.

connect = ಸಂಯೋಜಿಸು.

consecutive = ಕ್ರಮಾನುಗತ.

consequent = ಉತ್ತರ ಪದ.

consider = ಗಮನಿಸು.

constant = ಸ್ಥಿರ.

construction = ರಚನೆ.

contact = ಸ್ಪರ್ಶ.

continuous = ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ.

—continuity = ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ.

continued fraction = ಪರಂಪರ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.
continued proportion = ಪರಂಪರ ಅನುಭಾಗ ; ಪರಂಪರ ಅನುಪಾತ.
convention = ಸಾಂಪ್ರದಾಯ.
convergent = ಅಗ್ರಮುಖ ; ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನ.
—convergence = ಅಗ್ರಮುಖತೆ ; ಪರಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ.
converse = ವಿಪರ್ಯಯ ; ವಿರುದ್ಧ.
convex = ಪೀನ.
—convex upwards = ಊರ್ಧ್ವಪೀನ.
—convex downwards = ಅಧಃ ಪೀನ.
—convexity = ಪೀನತೆ.
coordinate = ನಿರ್ದೇಶಕ.
—coordinate axis = ನಿರ್ದೇಶಕಾಕ್ಷ.
corollary = ಉಪಲಬ್ಧ ; ಉಪಫಲ ; ಅನುಮಿತ.
correct = ಸರಿ.
—correction = ತಿದ್ದುಪಡಿ.
correspond = ಅನುಗುಣವಾಗಿರು, ಜವಾಬಾಗಿರು.
criterian = ನಿರ್ಧಾರಕ ; ನಿರ್ಣಾಯಕ ; ಶೋಧಕ ; ಪರೀಕ್ಷಕ.
cross-multiplication = ಕರ್ಣ ಗುಣಕಾರ.
cross-section = ಅಪಚ್ಛೇದನ.
cosecant = ಕೋಟಿಛೇದಕ.
cosine = ಕೋಟಿಜ್ಯಾ.
cotangent = ಕೋಟಿಸ್ಪರ್ಶಕ.
cube = ಘನ.
current point = ಪ್ರಚಲಿತ ಬಿಂದು.
curve = ರೇಖೆ.
—curved = ಕುಟಿಲ ; ವಕ್ರ ; ಪ್ರವಣ.

—curved surface = ಪ್ರವಣ ಮುಖಸ್ಥಲ.
curvature = ಪ್ರವಣತೆ.
cusp = ಕುಶಬಿಂದು.
cut = ಛೇದಿಸು ; ಛೇದನ.
cycle = ಚಕ್ರ; ಆವರ್ತನೆ.
—cyclic = ಚಕ್ರೀಯ; ಆವರ್ತ.
cylinder = ಕಾಂಡ.
—cylindrical coordinates = ಕಾಂಡದ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.
dash = ಅಶು ರೇಖೆ.
data = ದತ್ತಾಂಶಗಳು.
—datum = ದತ್ತಾಂಶ (ಏಕವಚನ).
decimal = ದಶಮಾಂಶ.
decrease = ಕ್ಷೀಣಿಸು ; ಅವರೋಹಿಯಾಗು.
deduce = ಅಭ್ಯೂಹಿಸು ; ನಿಗಮಿಸು ; ಅನುಮಿತಿಸು.
—deduction = ಅಭ್ಯೂಹ; ನಿಗಮನ ; ಅನುಮಿತ.
—deductive = ಅಭ್ಯೂಹಾತ್ಮಕ ; ಅನುಮಾನಿಕ.
definite = ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ; ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟ ; ನಿಯತ.
definition = ನಿರೂಪಣೆ.
degree = ಘಾತ ; ಸಮಕೋನದ 1/90 ಭಾಗ.
demonstrate = ಪ್ರತಿಪಾದಿಸು.
denominator = ಛೇದ.
dependent = ಅವಲಂಬಿ, ಸಂಯೋಜಿತ.
derive = ಅವತರಿಸು ; ಜನಿಸು ; ಅಂತರಿಸು ; ಉತ್ಪಾದಿಸು.
—derived function = ಜನ್ಯ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ.
—derivation = ಅಂತರಣ ; ಉತ್ಪಾದನ; ನಿಷ್ಪತ್ತಿ.
descend = ಅವರೋಹಿಯಾಗು.
detect = ಅನ್ವೇಷಿಸು ; ಪತ್ತೆಮಾಡು.

determine = ನಿರ್ಧರಿಸು.
determinant = ನಿರ್ದೇಶಕ ; ಚೌಬಂಧ.
diagonal = ಕರ್ಣ ; ಶ್ರುತಿ.
diagram = ನಕ್ಷೆ.
difference = ವ್ಯತ್ಯಾಸ ; ಅಂತರ.
differential = ಅಂತರಾಂಶ.
—differential calculus = ಅಂತರಾಂಶ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ.
—differential coefficient = ಅಂತರಾಂಶ ಸಹವರ್ತನ.
—differentiate = ಅಂತರಿಸು.
—differentiation = ಅಂತರಣ.
direct = ಋಜುವಾದ ; ನೇರವಾದ.
direction = ದಿಕ್ಕು.
directrix = ದಿಕ್‌ಸ್ತಂಭ.
discontinuity = ವಿಚ್ಛಿತ್ತಿ.
—discontinuous = ವಿಚ್ಛಿನ್ನ.
discriminate = ವಿವೇಚಿಸು.
—discriminant = ವಿವೇಚಕ.
discuss = ಚರ್ಚಿಸು.
—discussion = ಚರ್ಚೆ.
diverge = ಅಪಾಗ್ರವಾಗು ; ಅನಂತಮುಖವಾಗು.
—divergent = ಅಪಾಗ್ರವಾದ.
—divergent series = ಅಪಾಗ್ರಶ್ರೇಣಿ.
divide = ಭಾಗಿಸು.
—division = ಭಾಗಹಾರ.
—dividend = ಭಾಜ್ಯ.
—divisor = ಭಾಜಕ.
domain = ಕ್ಷೇತ್ರ.

dotted line = ಬಿಂದು ಸಹಿತ ರೇಖೆ.
double = ದ್ವಿಗುಣ.
—double point = ದ್ವಿಗುಣ ಬಿಂದು.
dynamics = ಚಲನ ವಿಜ್ಞಾನ.

eccentricity = ಅತಿರೇಕ.
edge = ಅಂಚು.
element = ಧಾತು ; ಘಟಕ ; ಘಟಕಾಂಶ ; ಮೂಲ ; ಮೂಲಾಂಶ.
—elementary = ಘಟಕ ; ಮೂಲಭೂತ ; ಪ್ರಾಥಮಿಕ.
—elementary functions = ಘಟಕಾನುಸ್ಥಾಪನೆಗಳು.
eliminate = ವಿಸರ್ಜಿಸು.
—eliminant = ವಿಯೋಗಿ.
ellipse = ಅವಲುಪ್ತಿ. (ex = out, leips = to leave ; omission ; defect).
energy = ಚೈತನ್ಯ.
entity = ಭವಿತ.
enunciate = ವದಿಸು ; ಸ್ಥಾಪಿಸಿ ಹೇಳು.
—enunciation = ಸ್ಥಾಪನವಾಕ್ಯ.
equal = ಸಮ.
—equality = ಸಮತ್ವ.
equation = ಸಮೀಕರಣ.
equi-angular = ಸಮಾನಕೋನಿಕ.
—equi-angular spiral = ಸಮಾನ ಕೋನಿಕ ಪರಿಭ್ರಮ.
equilateral triangle = ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನ.
error = ದೋಷ.
establish = ಸ್ಥಾಪಿಸು.
escribe = ಬಹಿರ್ಯೋಜಿಸು, ಬಹಿರ್ವೃತ್ತಿಸು, ಬಹಿಃ ಪರಿಸ್ಥಾಪಿಸು

etc. = ಇತ್ಯಾದಿ.
even = ಸರಿ.
evident = ಸ್ವಗೋಚರ.
evolute = ವಿಕಾಸಿರೇಖೆ (that which evolves)
evolution = ವಿಕಾಸ.
exact = ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟವಾದ, ಸರಿಹೊಂದುವ
examine = ಪರೀಕ್ಷಿಸು.
example = ಉದಾಹರಣೆ.
excess = ಅತಿರೇಕ.
exchange = ವಿನಿಮಯ.
exclude = ಬಹಿಷ್ಕರಿಸು.
—excluded = ಬಹಿಷ್ಕೃತ.
exercise = ಅಭ್ಯಾಸ.
exhibit = ಪ್ರದರ್ಶಿಸು.
expand = ವಿಶಾಲಿಸು ; ವಿಸ್ತರಿಸು.
—expansion = ವಿಶಾಲನ ; ವಿಸ್ತರಣೆ.
explanation = ವಿವರಣೆ ; ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ.
explicit = ಪ್ರಕಟ.
exploration = ವಿಚಯನ.
exponential function = ಸೂಚಕ ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ.
expression = ವ್ಯಕ್ತಕ ; ರಾಶಿ ; ಪ್ರಕಾಶಕ.
extend = ವಿಸ್ತರಿಸು : ಬಡಾಯಿಸು ; ವ್ಯಾಪಿಸು ; ಪಸರಿಸು.
extension = ವಿಸ್ತರಣೆ ; ಬಡಾವಣೆ.
exterior = ಬಾಹ್ಯ.
extract = ಉದ್ಧೃತ ಭಾಗ ; ಉದ್ಧರಣ.
extraction = ಉತ್ಪಾದನೆ ; ಉದ್ಪಾಟನೆ.

factor = ಅಪವರ್ತನ.
figure = ಆಕೃತಿ.
finite = ಪರ್ಯಾಪ್ತ.
fixed = ಸ್ತಬ್ಧ ; ಅಚಲ.
flower brackets = ಪುಷ್ಪಾವರಣಗಳು.
focus = ನಾಭಿ.
folium = ಪತ್ರಲತಾ (ಎಂಬ ರೇಖೆ).
foot = ಪಾದ.
form = ರೂಪ ; ನಿರ್ಮಿಸು. (form the equation etc.)
former half = ಪೂರ್ವಾರ್ಧ.
formula = ಸೂತ್ರ.
fraction = ಭಿನ್ನರಾಶಿ.
from first principles = ಪ್ರಭವದಿಂದ ; ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ.
function = ಅನುಸ್ಥಾಪನೆ (ಈ ಪದದ ಮೂಲವು ಸಂಸ್ಕೃತದ ಭುಜ್ [to enjoy) ; ಭುಜ್ = ಭುಂಗ್ತ, ಭುಂಗ್ತನ.—function —Annandale]
fundamental = ಆಧಾರಭೂತ ; ಮೂಲಾತ್ಮಕ.
funnel = ಲಾಳಿಕೆ.

general = ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ; ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ; ಸರ್ವಾಂಗ ; ವಿಸ್ತಾರವಾದ.
—generality = ಸಾರ್ವತ್ರಿಕತೆ ; ಸರ್ವವ್ಯಾಪ್ತಿ.
—generalize = ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ವಿಶಾಲಿಸು.
—generalization = ವ್ಯಾಪ್ತಿ ವಿಸ್ತರಣ ; ವ್ಯಾಪ್ತಿವೈಶಾಲ್ಯ.
general equation = ಸರ್ವಪದ ಸಮೀಕರಣ ; ಸರ್ವಾಂಗಸಮೀಕರಣ.
geometry = ರೇಖಾಗಣಿತ ; ಜಾಮಿತಿ.

—geometric, geometrical = ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ; ಜಾಮಿತೀಯ.

—geometrical interpretation = ರೇಖಾರ್ಥ.

—geometric mean = ರೇಖಾಮಧ್ಯಮ.

—geometric progression = ರೇಖಾ ಪ್ರಗಾಮಿ.

given = ದತ್ತ.

glossary = ವಿಶೇಷ ಪದಗಳ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುವ ಶಬ್ದಕೋಶ ಅಥವಾ ನಿಘಂಟು.

graph = ನಕ್ಷೆ.

gravity = ಗುರುತ್ವ

greatest = ಮಹತ್ತಮ ; ಅತ್ಯಧಿಕ.

—greatest common measure (g.c.m.) = ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ.)

harmonic = ಮೇಳಕ.

—harmonic mean = ಮೇಳಕ ಮಧ್ಯಮ.

—harmonic progression = ಮೇಳಕ ಪ್ರಗಾಮಿ.

height = ಎತ್ತರ ; ಉನ್ನತಿ ; ಔನ್ನತ್ಯ.

—height of a segment of a circle = ಶರ.

hemisphere = ಅರ್ಧಗೋಳ.

highest common factor (h. c. f.) = ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ.)

hold = ಹೊಂದು ; ಸಿದ್ಧಿಸು ; ನಿಜವಾಗು ; ಹಿಡಿ.

hollow = ನಿಮ್ನ ; ರಿಕ್ತ.

homogeneous = ಸಮಘಾತೀಯ.

horizon = ದಿಗಂತ ; ಕ್ಷಿತಿಜ ; ಬಾನಂಚು ; ಬಾಂಗೆರೆ.

—horizontal axis = ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷ.

hyperbola = ಅತಿಕ್ಷೇಪ. (ballow = to throw).
hypotenuse = ಕರ್ಣ.
hypothesis = ಆಧಾರ; ಹಸ್ತಿಭಾರ ; ಅಧಿರೋಪ ; ಅಧಿವಾಕ್ಯ ; ದತ್ತ.

identical = ಸರ್ವಸಮ.
—identity = ಸರ್ವಸಮತ್ವ ; ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ.
id est (latin) : i.e. = ಎಂದರೆ ; (ಇದೂ ಅದೇ).
image = ಪ್ರತಿಬಿಂಬ.
imaginary number = ಭಾವನಾಂಕ ; ಕಲ್ಪನಾಂಕ.
inclination = ಬಾಗು ; ಕೋನ.
included = ಅಂತರ್ಗತ.
incommensurable = ಅಪರಿಮೇಯ.
increase = ವರ್ಧಿಸು.
—increment = ವರ್ಧನ.
indefinite = ಅನಿಶ್ಚಿತ ; ಅಸ್ಪಷ್ಟ.
independent = ಸ್ವತಂತ್ರ.
index = ಸೂಚಕ.
induction = ಅನುಪ್ರೇರಣೆ ; ಪ್ರೇರಣೆ ; ಪ್ರಚೋದನೆ.
inequality = ಅಸಮತೆ ; ವಿಷಮ.
inference = ಫಲಿತಾರ್ಥ.
inferior = ಅಲ್ಪತಮ.
infinitesimal = ಸೂಕ್ಷ್ಮಾಂಶ ; ಅಣೀಯಾಂಶ.
inflexion = ಪ್ರತಿವಲನ ಬಿಂದು ; ನಿಷ್ಪ್ರವಣ ಬಿಂದು.
initial line = ಆದಿರೇಖೆ.
initial velocity = ಆದಿವೇಗ.
inscribe = ಅಂತರ್ಯೋಜಿಸು ; ಅಂತಃ ಪರಿಸ್ಥಾಪಿಸು.
instrument = ಉಪಕರಣ.

integer = ಪೂರ್ಣಾಂಕ.
integral = ಸಮಗ್ರ.
—integral calculus = ಸಮಗ್ರಣ ಕಲನ ವಿನ್ಯಾಸ.
—integrate = ಸಮಗ್ರಿಸು.
—integration = ಸಮಗ್ರಣ.
intercept = ಅಂತರ್ಭಾಗ ; ಅಂತರ್ಗತಭಾಗ.
interchange = ವಿನಿಮಯ.
interior = ಅಂತರಂಗ.
—interior opposite angle = ಅಂತಸ್ಸ್ಥಾಭಿಮುಖಕೋನ.
—interior point = ಆಂತರಿಕ ಬಿಂದು.
internal = ಆಂತರಿಕ.
—internal contact = ಅಂತಃಸ್ಪರ್ಶ.
interpretation = ಅಂತರಾರ್ಥ ವಿವರಣೆ.
intersect = ಛೇದಿಸು ; ಕತ್ತರಿಸು ; ಸಂಧಿಸು.
—point of intersection = ಛೇದಕ ಬಿಂದು ; ಸಂಧಿ ಬಿಂದು ; ಕರ್ತರಿಬಿಂದು.
interval = ಅವಧಿ.
intrinsic = ಅಂತರ್ಗುಣ ; ವಾಸ್ತವಿಕ ; ಸಹಜ ; ನೈಜ.
introduction = ಪ್ರವೇಶಿಕೆ.
inverse = ವಿಲೋಮ.
—inversion = ವಿಲೋಮನ.
inverted = ಅಪಶೃಂಗ.
involute = ವಿಕಾಸಜನ್ಯರೇಖೆ.
involution = ಸಂಘಾತ ; ಪೂರ್ಣಾಂಕಘಾತ.
irrational number = ಅಧಾರಣಾಂಕ. (rate = ಧಾರಣ)
irresoluble = ಅನಪವರ್ತೀಯ.
isolated point = ಏಕಾಂಗಿಬಿಂದು.

join = ಜಂಟಿಸು ; ಸಂಯೋಜಿಸು.

kind = ಜಾತಿ ; ವಿಧ.

latter half = ಉತ್ತರಾರ್ಧ.
latus rectum = ನಾಭಿ ವೈಶಾಲ್ಯ ; ನಾಭಿ ದ್ವಿಭುಜ.
law = ನಿಯಮ.
left hand side (L.H.S.) = ವಾಮಭಾಗ ; ಎಡಭಾಗ.
lemma = ಸಹಾಯಕ ಫಲ ; ಸಹಾಯಕ.
lemniscate = ದ್ವೀಪದ್ವಯ (ಎಂಬರೇಖೆ). [ಏಜಿಯನ್ (Egean) ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಲೆಮ್ನಾಸ್ (Lemnos) ಎಂಬ ದ್ವೀಪದ್ವಯದ ಆಕೃತಿ.]
length = ಉದ್ದ ; ಲಾಂಬಿ.
like = ಸದೃಶ ; ಸಜಾತೀಯ.
limacon = ಮಹೀಲತಾ (ಎಂಬ ಮಣ್ಣುಹುಳುವಿನ ಆಕೃತಿಯ ರೇಖೆ. limacis = limax = earth-worm).
limit = ಪರಿಮಿತಿ.
line = ಗೆರೆ ; ರೇಖೆ.
linear = ಸರಳ.
locus = ಪಥ.
logarithm = ಲಘುಮಿತಿ.
—logarithmic = ಲಘುಮಿತೀಯ.
lower bound = ಅಧೋಬಂಧನ

magnitude = ಪ್ರಮಾಣ ; ಗಾತ್ರ.
major = ಗುರು ; ಮಹಾ ; ಜ್ಯೇಷ್ಠ ; ಪ್ರಧಾನ.
—major axis = ಪ್ರಧಾನಾಕ್ಷ.

many = ಅನೇಕ ; ಬಹು.

—many-valued function = ಬಹುಮೂಲ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆ

margin = ಪಾರ್ಶ್ವವಿರಾಮ ; ಅವಕಾಶ.

mass = ವಸ್ತುತ್ವ.

mathematics = ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ. (ಮತಿಮಥಕ)

—mathematical = ಗಣಿತೀಯ.

—mathematical induction = ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ.

—mathematician = ಗಣಕ.

maximum = ಗರಿಷ್ಠ.

—maximum point = ಗರಿಷ್ಠ ಬಿಂದು.

—maximum value = ಗರಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯ.

—maximum (absolute) = ಮಹತ್ತಮ.

mean = ಮಧ್ಯಮ.

—mean proportional = ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ.

—mean value = ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ.

—mean value theorem = ಮಧ್ಯಮ ಮೂಲ್ಯ ಸಂಸಿದ್ಧಿ.

measure = ಮಾನ ; ಅಳತೆ ; ಪರಿಮಾಣ.

—measurable = ಪರಿಮೇಯ.

mechanical = ಯಾಂತ್ರಿಕ.

mention = ಉಲ್ಲೇಖಿಸು ; ಎತ್ತಿಹೇಳು.

method = ವಿಧಾನ.

middle = ಮಧ್ಯ.

minimum = ಕನಿಷ್ಠ

—minimum point = ಕನಿಷ್ಠ ಬಿಂದು.

—minimum value = ಕನಿಷ್ಠ ಮೂಲ್ಯ.

—minimum (absolute) = ಲಘುತಮ.

minor = ಕನೀಯ ; ಚಿಕ್ಕಯುವ ; ಅಲ್ಪ.

—minor axis = ಕನೀಯಾಕ್ಷ.
minus sign = ಋಣಚಿಹ್ನೆ.
miscellaneous = ಸಂಕೀರ್ಣ.
mode = ರೀತಿ ; ವಿನ್ಯಾಸ.
monotonic = ಏಕನಾದೀಯ ; ಏಕಾಯನ ; ಏಕಾಪ್ಯೇಕ.
multiple = ಗುಣಿತ ; ಬಹುಳ.
—multiple point = ಗುಣಬಿಂದು.
multiplicand = ಗುಣ್ಯ.
multiplier = ಗುಣಕ.
multiply = ಗುಣಿಸು.
—multiplication = ಗುಣಕಾರ.

necessary = ಅವಶ್ಯಕ.
negative = ಋಣ.
neighbourhood = ಸಾಮೀಪ್ಯ
node = ಕಂಠಬಿಂದು.
non-recurring (non-repeating) = ಅನಾವರ್ತ.
non-terminating = ಅಂತ್ಯರಹಿತ ; ಅನಂತಾವಧಿ.
normal = ಲಂಬರೇಖೆ.
notation = ಸಂಕೇತ.
note = ಟಿಪ್ಪಣಿ.
number = ಸಂಖ್ಯೆ.
—number of terms in a progression = ಗಚ್ಛ (ಭಾಸ್ಕರ)
numerator = ಅಂಶ.
numerical = ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ.

oblique = ತಿರ್ಯಕ್ ; ಅಸಮ ; ಓರೆಯಾದ.
—oblique axes = ಅಸಮಾಕ್ಷಗಳು.
oblong = ಆಯತ.
observation = ಅವೇಕ್ಷಣ ; ವೀಕ್ಷಣೆ.
obtuse angle = ವಿಶಾಲ ಕೋನ.
odd = ಬೆಸ ; ವಿಷಮ.
of constant length = ಸ್ಥಿರಲಾಂಬಿ.
one to-one correspondence = ಏಕಾಭ್ಯೇಕ ಅನುಗುಣ.
open = ಅನಾವೃತ.
operator = ಕಾರಕ.
opposite = ಅಭಿಮುಖ ; ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ.
order = ಅಧಿಷ್ಠಾನ ; ಅಂತಸ್ತು ; ಹಂತ ; ದರ್ಜೆ.
ordinate = ಆರೂಢ ; ಭುಜ ; y-ನಿರ್ದೇಶಕ.
origin = ಮೂಲಬಿಂದು.
orthogonal = ಸಮಕೋನಿಕ ; ಲಂಬ.
oscillating series = ಲೋಲಕ (ಆಂದೋಲಕ, ಡೋಲಾಯುಕ) ಶ್ರೇಣಿ.
oval = ಅಂಡಾಕೃತಿ.

pair = ಜೊತೆ ; ಯುಗ್ಮ ; ಯುಗಳ.
parabola = ಪರಿಕ್ಷೇಪ (para = beside, ballow = to throw)
parallel = ಸಮಾನಾಂತರ.
—parallelogram = ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.
parameter = ಪರಮಾನ.
path = ಪಥ.
partial = ಪಾಕ್ಷಿಕ.

—partial differentiation = ಪಾಕ್ಷಿಕಾಂತರಣ.
—partial fractions = ಪಾಕ್ಷಿಕ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು.
particle = ಕಣ.
particular = ಪ್ರತ್ಯೇಕ.
passing through the pole = ಧ್ರುವಗತ.
peculiarity = ವಿಶೇಷ ಗುಣ.
pedal = ಪಾದೀಯ.
—pedal curve = ಪಾದೀಯ ರೇಖೆ.
—pedal triangle = ಪಾದೀಯ ತ್ರಿಭುಜ.
penultimate = ಉಪಾಂತ ; ಕೊನೆಯದರ ಹಿಂದಿನದಾದ.
perimeter = ಸುತ್ತಳತೆ.
perpendicular = ಲಂಬ.
plane = ಸಮತಲ.
plus sign = ಸಂಕಲನ ಚಿಹ್ನೆ.
point = ಬಿಂದು.
pole = ಧ್ರುವ.
—polar coordinates = ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.
—polar reciprocal = ಧ್ರುವೀಯ ವ್ಯತಿಹಾರ ರೇಖೆ
polynomial = ಬಹುಪದಿ.
position = ಸ್ಥಾನ.
positive = ಧನ.
postulate = ಸ್ವೀಕೃತ (ಅಂಗೀಕೃತ) ಪಕ್ಷ
power = ಘಾತ.
principal = ಪ್ರಧಾನ.
principle = ತತ್ತ್ವ
problem = ಸಮಸ್ಯೆ.
process = ಕ್ರಮವಿಧಿ ; ವಿಧಾನ ; ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ; ಕಾರ್ಯಗತಿ.

produce = ಲಂಬಿಸು ; ಉದ್ಘೋರ್ಣಿಸು.
product = ಗುಣಲಬ್ಧ.
progression = ಪ್ರಗಾಮಿ : ಪ್ರವರ್ಧಿ ; ಪ್ರಗತಿ ; ಸಾಗಣಿ ;
project = ಪ್ರಕ್ಷೇಪಿಸು.
—projection = ಪ್ರಕ್ಷೇಪಣ.
proof = ಸಾಧನೆ.
proper = ಸಾಧು ; ಶುದ್ಧ ; ಯಥಾರ್ಥ ; ಉಚಿತ ; ಯೋಗ್ಯ ; ಸಭ್ಯ ; ಶಿಷ್ಟ ; ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟ.

property = ಗುಣ ; ಲಕ್ಷಣ.
proportion = ಅನುಪಾತ ; ಅನುಭಾಗ ; ದಾವಸಾಷಾ.
—proportional = ಅನುಪಾತಿ ; ಅನುಭಾಗಿ.
proposition = ಪ್ರಮೇಯ.
pure mathematics = ಶುದ್ಧ ಗಣಿತ.
pyramid = ಗೋಪುರ.
Pythagoras' theorem = ಶುಲ್ವ ಸಂಸಿದ್ಧಿ.

quadrant = ಚತುರ್ಭಾಗ.
quadratic equation = ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ.
quadrilateral = ಚತುರ್ಭುಜ.
quantity = ಪರಿಮಾಣ.
question = ಪ್ರಶ್ನೆ.
quad erat demonstratum (latin) = Q.E.D = ಇತಿಸಿದ್ಧಿ.
quotient = ಭಾಗಲಬ್ಧ.

radian = ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿ.
—radian measure = ತ್ರಿಜ್ಯಕಂಸಿಮಾನ.
radical = ಮೂಲ.

—radical sign = ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆ.

radius = ತ್ರಿಜ್ಯ

—radius of curvature = ಪ್ರವಣತಾ ತ್ರಿಜ್ಯ.

—radius vector = ದಿಗ್ರೇಖೆ.

—radical = ತ್ರಿಜ್ಯಾವಲಂಬ.

range = ಅವಧಿ.

rate = ಧಾರಣ.

—rate-measurer = ಧಾರಣಮಾಪಕ.

ratio = ಧಾರಣರಾಶಿ.

rational number = ಧಾರಣಾಂಕ.

real number = ನಿಜಾಂಕ.

reason = ಕಾರಣ.

reciprocal = ವ್ಯತಿಹಾರ ; ಮೇಳ ; ಹರಾತ್ಮಕ ; ಅನ್ಯೋನ್ಯ : ಪರಸ್ಪರ : ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ.

rectangle = ಆಯ ; ದೀರ್ಘ ಚತುರಸ್ರ.

rectangular hyperbola = ಸಮ ಅತಿಕ್ಷೇಪ.

recurring = ಆವರ್ತ.

reduce = ಅವಶೇಷಿಸು ; ಕ್ಷೀಣಿಸು ; ಇಳಿಸು.

reductio ad absurdum (latin) = ಅಸಂಗತಿ ಪ್ರದರ್ಶನ.

reflect = ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸು.

—reflection = ಪ್ರತಿಬಿಂಬನ.

regular = ಏಕಪ್ರಕಾರ (uniform).

relation = ಸಂಬಂಧ.

remainder = ಶೇಷ.

repeat = ಆವರ್ತಿಸು.

—repeated = ಆವರ್ತ.

—repetition = ಆವರ್ತನೆ.

replace = ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸು.
represent = ರೂಪಿಸು.
—representation = ರೂಪಣೆ.
required = ವಾಂಛಿತ ; ಅಭೀಷ್ಟ.
respectively = ಕ್ರಮವಾಗಿ.
result = ಫಲಿತಾಂಶ.
reversion = ವಿಪರ್ಯಾಸ.
revolution = ಆವೃತ್ತಿ.
rhodonae = ಪದ್ಮದಳ ರೇಖೆ.
rhombus = ವಜ್ರಾಕೃತಿ.
right = ಋಜು ; ಸಮ; ಸರಿ ; ಬಲಪಾರ್ಶ್ವ.
—right angle = ಸಮಕೋನ.
—right circular cone = ಋಜು ವರ್ತುಳೀಯ ಶಂಕು.
—right hand side = ಬಲಭಾಗ ; ದಕ್ಷಿಣಭಾಗ.
rigid = ಅನಮ್ಯ.
rod = ದಂಡ.
root = ಮೂಲ.
—root sign = ಕರಣಿ ಚಿಹ್ನೆ.
rope = ರಜ್ಜು; ದಾಮ ; ಸಂದಾನ; ಹಗ್ಗ.
rough = ಕರ್ಕಶ ; ದುರ್ಗಮ ; ಸ್ಥೂಲ.
row = ಸಾಲು.
rule = ನಿಯಮ ; ವಿಧಿ ; ಸೂತ್ರ ; ಕರಣಸೂತ್ರ (ಭಾಸ್ಕರ).
—rule of three = ತ್ರೈರಾಶಿ.
ruler = ಸರಳ ದಂಡ.

satisfy = ಪಾಲಿಸು ; ಹೊಂದು. (satisfy an equation)
scale = ಮಾನ.

science = ವಿಜ್ಞಾನ : ಶಾಸ್ತ್ರ.
secant = ಛೇದಕ ; ಜ್ಯಾ.
section = ಭಾಗ ; ಛೇದಕ ರೇಖೆ.
sector = ಶಕಲ.
segment = ಖಂಡ.
semi = ಅರ್ಧ.
—semi-axes = ಅರ್ಧಾಕ್ಷಗಳು.
—semi-conjugate diameters = ಅನುಬದ್ಧ ವ್ಯಾಸಾರ್ಧಗಳು
—semi-vertical angle = ಶೃಂಗಾರ್ಧಕೋನ.
sequence = ಕ್ರಮಾನುಸರಣಿ ; ಅನುಕ್ರಮಿ ; ಪರ್ಯಾಯ.
series = ಶ್ರೇಣಿ.
set of points = ಬಿಂದುವರ್ಗ.
side = ಬಾಹು ; ಭುಜ ; ಪಾರ್ಶ್ವ.
sign = ಚಿಹ್ನೆ.
similar = ಸದೃಶ.
simple = ಅಕ್ಲಿಷ್ಟ ; ಅಮಿಶ್ರ ; ಸರಳ ; ಸುಲಭ.
simplify = ಸುಲಭೀಕರಿಸು ; ಶೋಧಿಸು.
—simplification = ಸುಲಭೀಕರಣ ; ಶೋಧನೆ.
simultaneous = ಸಮಕಾಲಿಕ.
sine = ಜ್ಯಾ.
single-valued function = ಏಕಮೂಲ್ಯಾನುಸ್ಥಾಪನೆ.
singular point = ವಿಜಾತಿ ಬಿಂದು.
slope = ಸ್ಪರ್ಶಪಾತ.
small brackets = ಅಲ್ಪಾವರಣಗಳು.
solve = ವಿಘಟಿಸು ; ಬಿಡಿಸು.
—solution = ವಿಘಟನೆ.

—solution of equations = ಸಮೀಕರಣ ವಿಘಟನೆ (ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವಿಕೆ.)

—solution of triangles = ತ್ರಿಕೋನ ವಿಘಟನೆ (ಅಂಗ ನಿರ್ಣಯ)

span = ಪನ್ನ ; ಅಪನ್ಯೈಶಾಲ್ಯ.

special = ವಿಶೇಷ.

sphere = ಗೋಳ.

—spherical polar coordinates = ಗೋಳಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.

spiral = ಪರಿಭ್ರಮಿ.

square = ಚೌಕ ; ಚದರ ; ವರ್ಗ.

—square brackets = ಚದರಾವರಣಗಳು.

—squared paper = ಚೌಕುಳಿ ಕಾಗದ.

standard = ರೂಢ ; ನಿರ್ಣಯ.

statement = ನಿಷ್ಕೃಷ್ಟೋಕ್ತಿ ; ಸ್ಥಾಪಕವಾಕ್ಯ ; ವಚನ ; ಹೇಳಿಕೆ ; ನ್ಯಾಸ (ಭಾಸ್ಕರ)

stationary point = ಸ್ತಬ್ಧ ಬಿಂದು.

straight line = ಸರಳ ರೇಖೆ.

structure = ರಚನೆ ; ಘಟನೆ ; ವಿನ್ಯಾಸ.

subnormal = ಅಧೀನ ಲಂಬರೇಖಾ ಖಂಡ.

substitute = ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪಿಸು.

—substitution = ಪ್ರತಿಸ್ಥಾಪನೆ.

subtangent = ಅಧೀನ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖಾಖಂಡ.

subtract = ಕಳೆ ; ವ್ಯವಕಲಿಸು.

—subtraction = ವ್ಯವಕಲನ.

—subtrahend = ವ್ಯವಕಲ್ಪ ; ವಿಯೋಜಕ ; ಶೋಧಕ.

successive = ಅನುಕ್ರಮ ; ಪರಂಪರ ; ಪರ್ಯಾಯ.

sufficient = ಯಥಾಸಮೃದ್ಧ.
suitable = ಸೂಕ್ತ ; ಉಚಿತ.
sum = ಮೊತ್ತ ; ಸಂಕಲಿತ ; ಸಾರಾಂಶ ; ಲೆಖ್ಖ.
—summation = ಸಂಕಲನ ; ಸಮಗ್ರಣ.
superior = ಉಚ್ಚ; ಉತ್ಕೃಷ್ಟ; ಮಹಾ ; ಮಹತ್ತಮ.
superpose = ಸಮಾರೋಪಿಸು.
supplementary angle = ಸರಳಪೂರಕಕೋನ.
surd = ಕರಣಿಸಂಖ್ಯೆ.
surface = ಮುಖಸ್ಥಲ.
symbol = ಸಂಕೇತ ; ಚಿಹ್ನೆ.
symmetry = ಸಮಸಂಗತಿ.
—symmetrical = ಸಮಸಂಗತ.
—axis of symmetry = ಸಮಸಂಗತಾಕ್ಷ
system = ಪ್ರಕ್ರಮ.

tables = ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ; ಚೌಪಟ್ಟೆ ; ಪದಕ.
tangent = ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ ; ಸ್ಪರ್ಶ (ಕೋನದ).
—tangent plane = ಸ್ಪರ್ಶತಲ.
—tangential polar coordinates = ಸ್ಪರ್ಶಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು.
target = ಲಕ್ಷ್ಯ ; ಲಕ್ಷ; ಲಕ್ಷಣ , ಶರವ್ಯ.
technical = ತಾಂತ್ರಿಕ ; ವೈಜ್ಞಾನಿಕ.
tend = ಸಮೀಪಿಸು ; ಒಲು.
term = ಪದ ; ಧನ (ಭಾಸ್ಕರ)
termination = ಅವಸಾನ ; ಮುಕ್ತಾಯ.
test = ನಿರ್ಧಾರಕ ; ನಿರ್ಣಾಯಕ ; ಪರುಷಕ ; ಪರೀಕ್ಷಕ.
theory = ಸಿದ್ಧವಿಚಾರ ; ತತ್ತ್ವವಿಚಾರ ; ಜಿಜ್ಞಾಸೆ ; ಮೀಮಾಂಸೆ.

—theoretical = ತಾತ್ವಿಕ.
—theorem = ಸಂಸಿದ್ಧಿ [ಸಿದ್ಧವಾಗಿರುವ (ready) ಫಲ].
thickness = ಗಾತ್ರ; ದಪ್ಪ.
thread = ತಂತು ; ದಾರ.
total = ಸಂಕಲಿತ ; ಒಟ್ಟು.
trace = ಅನುಸರಿಸಿ ಎಳೆ ; ಅನುಸರಿಸು ; ಅನುರೇಖಿಸು ; ತಿದ್ದು.
—tracing of curves = ರೇಖಾನುಸರಣ.
tractrix = ಪಂಥಿನೀ ಎಂಬ ರೇಖೆ.
trapezium = ತಟೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ.
transform = ರೂಪಾಂತರಿಸು ; ಪರಿಣಮಿಸು.
—transformation = ರೂಪಾಂತರ ; ರೂಪಾಂತರಣ ; ಪರಿಣಮನ.

transposition = ಸ್ಥಾನಾಂತರಣ ; ವರ್ಗಾವಣೆ.
transversal = ತಿರ್ಯಗ್ರೇಖೆ.
triangle = ತ್ರಿಕೋನ.
—triangular = ತ್ರೈಕೋನಿಕ.
trigonometry = ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ.
—trigonometric = ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ.
triple point = ತ್ರಿಗುಣಬಿಂದು.
trisection = ತ್ರಿಭಾಜನ.
trisectrix = ತ್ರಿಭಾಗಿನೀ ಎಂಬ ರೇಖೆ.
true = ನಿಜವಾಗು ; ಸತ್ಯವಾಗು ; ತಥ್ಯವಾಗು.
—truth = ನಿಜ ; ಸತ್ಯ ; ತಥ್ಯ.
turning point = ತಿರುಬಿಂದು ; ತಿರುವು.

ultimate = ಅಂತಿಮ.
undetermined = ಅನಿಯತ ; ಅನಿರ್ದೇಶೀಯ.

understood = ಅಧ್ಯಾಹಾರವಾದ.
undulation = (ತರಂಗ) ಸ್ಪಂದನ.
unequal = ಅಸಮ ; ಅಸಮಾನ ; ವಿಷಮ.
uniform = ಏಕಪ್ರಕಾರ ; ಏಕರೂಪ ; ಸಮ.
—uniformity = ಏಕ ಪ್ರಕಾರತೆ ; ಏಕರೂಪತೆ ; ಸಮತೆ.
unit = ಏಕ್ಕ ; ಮಾನ ; ಪ್ರಮಾಣಮೂಲ.
unknown = ಅಜ್ಞಾತ : ಅವ್ಯಕ್ತ
unlike = ಅಸದೃಶ ; ವಿಜಾತೀಯ.
upper = ಉಚ್ಚ ; ಮೇಲಿನ.
usual = ರೂಢ.
—usual notation = ರೂಢ ಸಂಕೇತ.

value = ಮೂಲ್ಯ.
vanish = ಶೂನ್ಯವಾಗು.
vary = ವಿಸ್ವಭಾವಿಸು ; ವಿರೂಪಿಸು ; ವಿಕಾರವಾಗು : ಮಾರ್ಪಡು.
—variable = ವಿಸ್ವಭಾವಿ ; ವಿರೂಪಿ ; ವಿಕಾರಿ ; ಮಾರ್ಪಿ.
—variation = ವಿಸ್ವಭಾವನೆ ; ವಿರೂಪಣೆ ; ವಿಕಾರ ; ಮಾರ್ಪು.
vector = ದಿಗ್ರೇಖೆ.
—vectorial angle = ದಿಕ್‌ಕೋನ.
velocity = ವೇಗ.
verify = ತಾಳೆಮಾಡು.
—verification = ತಾಳೆ.
vertex = ಶಿರೋಬಿಂದು ; ಶೀರ್ಷಬಿಂದು ; ಶೃಂಗ.
—vertical angle = ಶೃಂಗಕೋನ.
vertical = ಊರ್ಧ್ವಲಂಬ ; ಶೀರ್ಷಾಭಿಮುಖ.
volume = ಘನ ; ಘನಫಲ ; ಘನಅಳತೆ.

where = ಎಲ್ಲಿ ; "ಸಂಗತ" [$y = f(u)$, ಸಂಗತ $u = \phi(x)$]

whole number = ಪೂರ್ಣಾಂಕ.
witch = ಮಾಂತ್ರಿಕ ರೇಖೆ.
with respect to (w. r. t.) = ಗೌರವಕ್ಕೆ ; ಗೌರವಿಸಿ ;
ಮರ್ಯಾದೆಗೆ.

x-axis = x-ಅಕ್ಷ; ಕ್ಷಿತಿಜಾಕ್ಷ; ಅಪಾಕ್ಷ: ಪಾದಾಕ್ಷ; ಸಮಾಕ್ಷ;
ತಿರ್ಯಗಕ್ಷ.

y-axis = y-ಅಕ್ಷ; ಭುಜಾಕ್ಷ; ಊರ್ಧ್ವಾಕ್ಷ; ಆರೂಢಾಕ್ಷ.

zero = ಸೊನ್ನೆ ; ಶೂನ್ಯ ; ಪೂಜ್ಯ.



ಶ್ರೀಕಾಂತ ಪವರ್ ಪ್ರೆಸ್, ಮೈಸೂರು–೪

...OL.
...AL.
Library ... N...
No ...